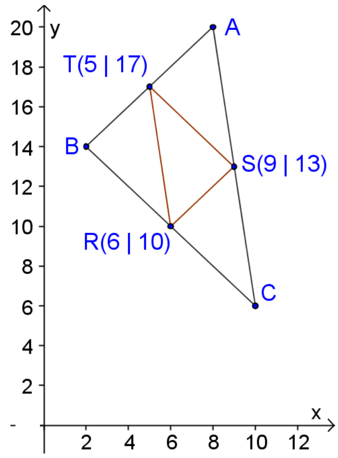
Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2011 der Jahrgangsstufe 11

1. a) $A(8|20)$, $B(2|14)$ und $C(10|6)$

b) Die Steigungen von ST und SR sind -1 bzw. 1, also $\sphericalangle TSR = 90°$.

c) Mit $AB = 2 \cdot SR = 6\sqrt{2}$ und $BC = 2 \cdot ST = 8\sqrt{2}$ folgt für die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 48$.

d) Der Umkreisradius ist $\frac{1}{2}AC = RT = \sqrt{18+32} = 5\sqrt{2}$.



2. a) Mit $y := 4^x$ folgt $y^2 + 32 = 18y$ und somit $(y-2)\cdot(y-16) = 0$.

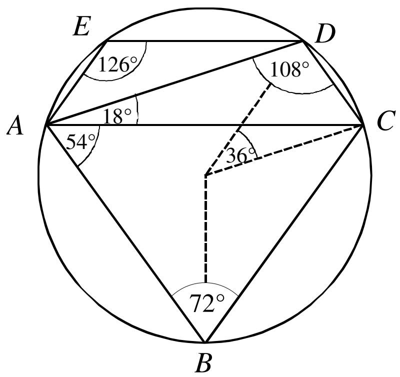
Aus $y = 2$ und $y = 16$ folgt $x = \frac{1}{2}$ bzw. $x = 2$.

b) Aus $a^2 - 440 = b^2$ und $440 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 11$ folgt $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 11$.

Es gibt vier Lösungen:

$a+b$	220	110	44	22
$a-b$	2	4	10	20
a	111	57	27	21
b	109	53	17	1

3. a)



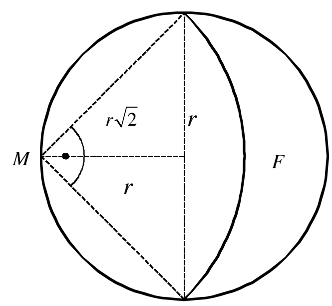
$AB = 2r\cos 36° = \varphi$

$CD = 2r\cos 72° = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

b) Sei r der Radius der Mondscheibe und F die Fläche des Schattens.

Dann gilt $F = \frac{\pi r^2}{2} + r^2 - \frac{1}{4}\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 = r^2$ und

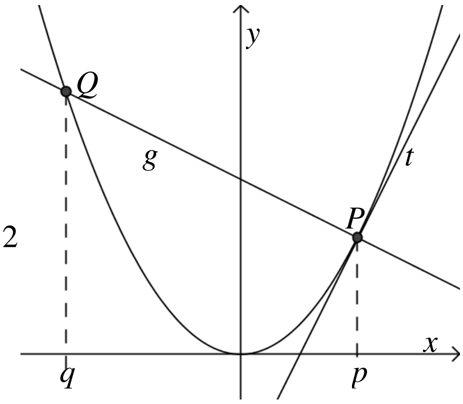
$\frac{\pi r^2 - F}{\pi r^2} = \frac{\pi - 1}{\pi} \approx 68\%$



4. a) g hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2p} \cdot x + p^2 + \frac{1}{2}$ bzw. $y - p^2 = -\frac{1}{2p}(x-p)$.

b) Aus $q^2 - p^2 = -\frac{1}{2p}(q-p)$ folgt $q = -p - \frac{1}{2p}$, wegen $q^2 - p^2 = (q-p)\cdot(q+p)$,

also $Q\left(-p-\frac{1}{2p}\,\middle|\,\left(-p-\frac{1}{2p}\right)^2\right)$



c) 1. Lösung durch quadratische Ergänzung:

Es gilt $q^2 = \left(-p-\frac{1}{2p}\right)^2 = p^2 + 1 + \frac{1}{4p^2} = \left(p - \frac{1}{2p}\right)^2 + 2$

Also wird $d^2 = q^2 + \left(q^2\right)^2$ minimal für $p = \frac{1}{2p}$,

d.h. $P\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$.

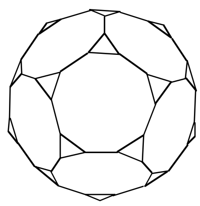
2. Lösung durch Differenzialrechnung:

Aus $d^2 = q^2 + q^4$ folgt $\left(d^2\right)' = 2q\cdot q' + 4q^3 \cdot q' = \underbrace{\left(2q + 4q^3\right)}_{\neq 0,\ da\ q<0} \cdot q'$

folgt $q' = \left(-p - \frac{1}{2p}\right)' = -1 + \frac{1}{2p^2} = 0$, d.h. $p^2 = \frac{1}{2}$ und $P\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$.

---

5. a) Ein Dodekaeder hat 30 Kanten und 20 Ecken.



b) Man erhält einen Ikosaeder (20 Flächen, 30 Kanten, 12 Ecken)

c) Ein Dodekaederstumpf wird durch 12 Zehnecke und 20 Dreiecke begrenzt.
Er hat 60 Ecken und 90 Kanten.

---

6. a) Die Gerade muss durch die Mittelpunkte der beiden Rechtecke gehen,
d.h. durch $(-3\,|\,2)$ und $(4\,|\,4)$.

Aus $\frac{y-4}{x-4} = \frac{4-2}{4-(-3)}$ folgt $y = \frac{2}{7}x + \frac{20}{7}$

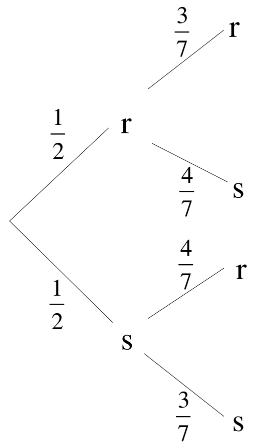
b) (i) Bei Spiegelung an $y = x$ wird $(x\,|\,y)$ zu $(y\,|\,x)$.

Aus $x = 2^y$ folgt $y = \log_2(x)$.

(ii) Bei einer $90°$ – Drehung wird $(x\,|\,y)$ zu $(y\,|\,-x)$.

Aus $-x = 2^y$ folgt $y = \log_2(-x)$.

7. a) Aus dem Baumdiagramm mit r (rot) und s (schwarz) folgt



(i) $\frac{3}{14}$

(ii) $\frac{3}{7}$

(iii) $\frac{4}{7}$

b) Die Tabelle zeigt die Vielfachen von 2 in $32!$ und wie oft sie durch 2 teilbar sind.

Zweierzahl	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
vielfach	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5

Also ist $n = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 31$

c) Die Folge der letzten Ziffer der 3er-Potenzen

Potenz	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	$\dots$
Einerziffer	3	9	7	1	3	9	7	1	$\dots$

hat die Periode 4.
Wegen $2011 = 502 \cdot 4 + 3$ ist die gesuchte Endziffer 7.

---

8. a) Die Anzahl der Jungen sei a, die der Mädchen b.

Dann gilt $a\frac{8}{100} + b\frac{60}{100} = (a+b)\frac{20}{100},$ also $3a = 10b$ und somit $a = 50$ und $b = 15$.

b) (i) $2^8 - 1 = 255$

(ii) $\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 8 + 28 + 56 = 92$