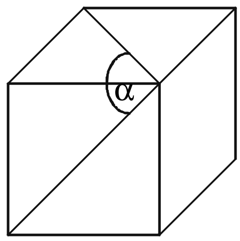
Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 10.02.2010

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2010 unter http://www.z-f-m.de im Bereich Projekte – MW11.

1. a) Seien $A(10|3)$ und $C(6|9)$ die entgegengesetzten Ecken eines Quadrates $ABCD$.

   Bestimmen Sie die Koordinaten von B und C.



   b) Bestimmen Sie in einem Würfel den Winkel α zwischen zwei Flächendiagonalen.

   c) Der Punkt $P(0|4)$ wird an der zweiten Winkelhalbierenden $y=-x$ nach Q gespiegelt.
   Der Punkt Q wird an der Geraden $x=2$ nach R gespiegelt.
   Der Punkt R wird an der Geraden $y=-3$ nach S gespiegelt.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

---

2. Die Multiplikation zweier geordneter Paare reeller Zahlen wird definiert durch:

   $(a,b)\times(c,d):=(ac-bd,ad+bc)$

   a) Berechnen Sie $(0,1)\times(0,1)$ und $(-1,0)\times(-1,0)$.

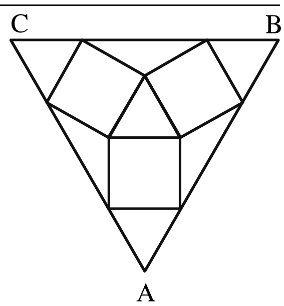
   b) Berechnen Sie $(a,b)^2:=(a,b)\times(a,b)$ für $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   c) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ für $n=4,8$ und 64.

---

3. Über den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge 1) werden nach außen Quadrate gezeichnet.
   Die drei Geraden durch benachbarte Ecken dieser Quadrate bilden ein gleichseitiges Dreieck ABC.

   Berechnen Sie die Seitenlänge und die Fläche des Dreiecks ABC.

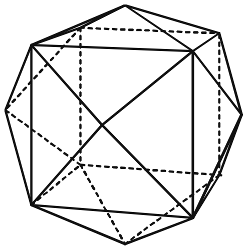


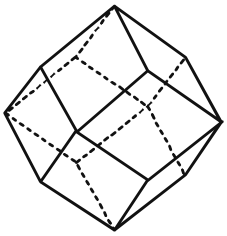
4. a) Sei k eine reelle Zahl sowie f und g die Funktionen $f(x) = 2x^2 + k$ und $g(x) = k \cdot x + 5$.
Für welche k gilt $f\left(g(3)\right) = 0$?

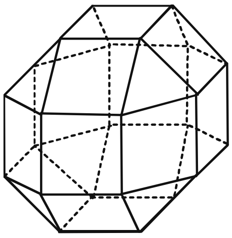
b) Für welche k hat die Funktion $f(x) = 6x^2 - 2kx + 7k$
(i) genau eine Nullstelle?
(ii) keine Nullstelle?

---

5. Errichtet man auf den Flächen eines Würfels Pyramiden („Zelte"), entsteht ein „gezelteter Würfel". Wählt man die Höhen der Pyramiden so, dass die Seitenflächen der Pyramiden, die eine Würfelkante gemeinsam haben, in einer Ebene liegen, so erhält man einen Rhombendodekaeder. Schneidet man dessen Ecken so ab, dass die Schnittebenen durch die Mitten der zugehörigen Kanten gehen, so entsteht ein Rhombenkuboktaeder.


Gezelteter Würfel


Rhombendodekaeder


Rhombenkuboktaeder

a) Seien e, f und k die Anzahl der Ecken, Flächen bzw. Kanten.
Ergänzen Sie die folgende Tabelle.

	Würfel	Gezelteter Würfel	Rhombendodekaeder	Rhombenkuboktaeder
e	8			
f	6			
k	12			
$e + f - k$	2			

b) Der Würfel habe die Kantenlänge a. Wie müssen die Höhen h der Pyramiden gewählt werden, damit
(i) die Pyramidenspitzen auf der Umkugel des Würfels liegen?
(ii) ein Rhombendodekaeder entsteht?

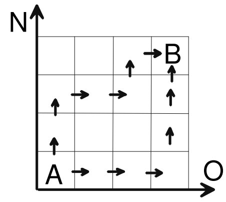
---

6. Zeichnen Sie die Parabel $y = x^2$ und einen Parabelpunkt $P\left(p \middle| p^2\right)$ im ersten Quadranten.
Die Tangente an die Parabel im Punkt P hat die Steigung $2p$.
Zeichnen Sie die Gerade g durch P, die senkrecht auf der Tangente steht. Diese Gerade schneide die Parabel in einem weiteren Punkt $Q\left(q \middle| q^2\right)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von Q in Abhängigkeit von P.

b) Wie muss P gewählt werden, damit die Summe S der Ordinaten von P und Q minimal wird, d.h. damit $p^2 + q^2$ möglichst klein wird?

7. a) Um im 4×4 - Gitternetz von A nach B zu gelangen, sind zwei Richtungen erlaubt: Nach Norden N und nach Osten O.

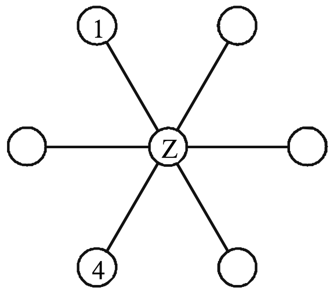


In der Abbildung sind zwei Wege eingezeichnet:

$N-N-O-O-N-O$ und $O-O-O-N-N-N$.

Wie viele Wege gibt es insgesamt von A nach B ?

b) In die sieben Felder sollen die Zahlen von 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede der drei Strecken die gleiche Summe hat.



Die Zahlen 1 und 4 sind bereits eingetragen.
Welche Zahl steht im Zentrum Z ?

c) Für welche ganze Zahl z ist $\dfrac{15}{3-z}$ eine ganze Zahl?

d) In einer Urne befinden sich 5 Smarties: 3 rote, 1 grünes und 1 gelbes.
Eine Person holt mit verbundenen Augen mit einem Griff 2 Smarties aus der Urne und isst sie auf.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit P haben die restlichen Smarties drei verschiedene Farben?

---

8. a) Über die Einwohner einer Stadt ist folgendes bekannt:

- 27% sind letztes Jahr mit dem Flugzeug verreist.
- 19% sind im selben Zeitraum mit dem Zug gefahren.
- 9% haben beide Verkehrsmittel benutzt.

Wie viel Prozent der Einwohner haben im letzten Jahr weder Flugzeug noch Zug benutzt?

b) In Steinheim finden jedes Jahr für eine Woche Festspiele statt. Während dieser Zeit vergrößert sich die Bevölkerung um 1900%.
Nach der Festspielwoche reisen alle Besucher wieder ab.
Um wie viel Prozent nimmt dann die Bevölkerung ab?

c) Wenn fünf Arbeiter neun Stunden brauchen, um drei Gruben auszuheben, wie viele Stunden brauchen dann drei Arbeiter für fünf Gruben?

d) Wenn in zwei Jahren der 1. Mai auf den gleichen Wochentag fällt und auch an jedem anderen Datum des Jahres – also vom 1. Januar bis zum 31. Dezember – alle Wochentage übereinstimmen, dann bezeichnet man diese zwei Jahre als *äquivalent*.
Zum Beispiel sind die Jahre 2003 und 2014 äquivalent.
Welches ist das nächste Jahr, das zu 2005 äquivalent ist?

Ein nicht notwendiger Hinweis:
Der 1. Januar 2005 war ein Samstag.