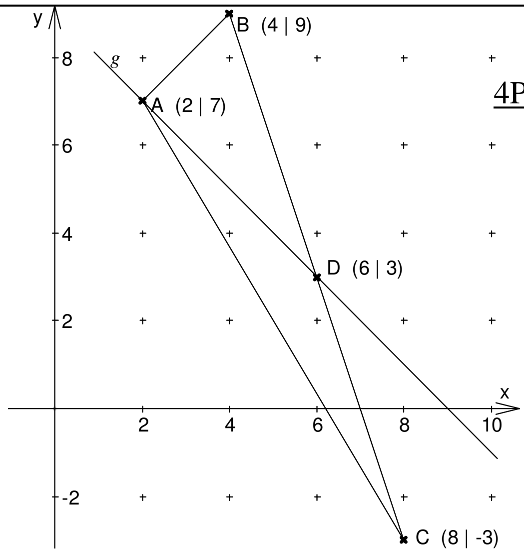
Lösungen zum
Mathematikwettbewerb 2010 der Jahrgangsstufe 11

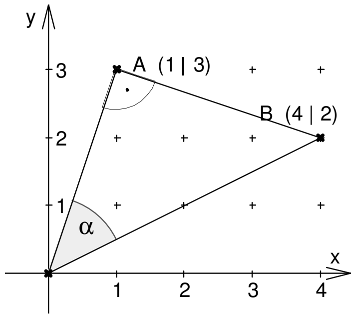
1. a) $D\left(\frac{4+8}{2}\middle|\frac{9-3}{2}\right)=D(6|3)$ **4P.**

Aus $\frac{y-7}{x-2}=\frac{7-3}{2-6}$ folgt $g: y=-x+9$.

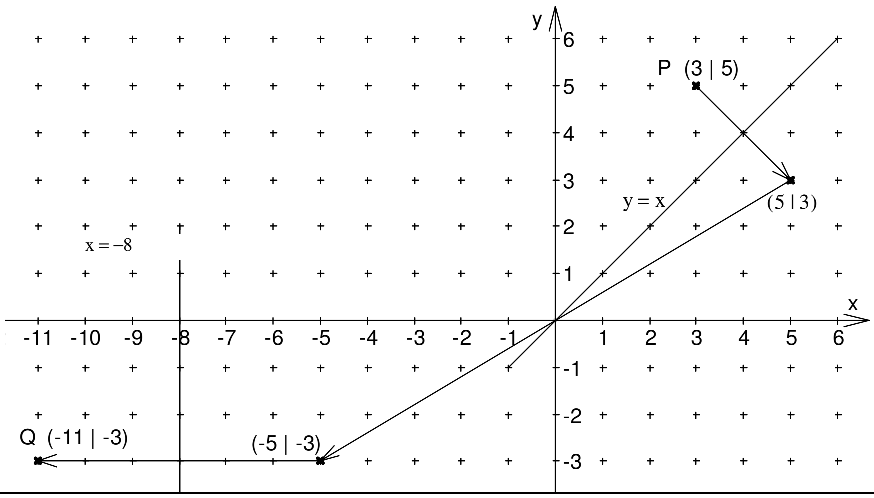
Seitenhalbierende:
$AD=\sqrt{(2-6)^2+(7-3)^2}=4\cdot\sqrt{2}$



b) ΔAOB ist gleichschenklig $(OA=AB)$ und rechtwinklig $(OA\perp AB)$, also ist $\alpha=45°$. **4P.**



c) **4P.**



2. a) $(-1,-2)\times(2,1)=((-1)\cdot 2-(-2)\cdot 1,(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 2)=(0,-5)$ **6P.**

$(0,-5)\times(0,1)=(0\cdot 0-(-5)\cdot 1,0\cdot 1+(-5)\cdot 0)=(5,0)$

b) (i) Aus $ax-by=a$ und $ay+bx=b$ folgt $(x,y)=(1,0)$.

(ii) Aus $ax-by=1$ und $ay+bx=0$ folgt $(x,y)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. **6P.**

3. Die Höhe der Dreiecke ist $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Diagonale: $1+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$ 4P.

Seite: $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 4P.

Fläche: $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{3}$ 4P.

---

4. a) Aus $f\left(f\left(x\right)\right)=\frac{f\left(x\right)+k}{1-f\left(x\right)}=\frac{\frac{x+k}{1-x}+k}{1-\frac{x+k}{1-x}}=\frac{x\frac{1-k}{2}+k}{\frac{1-k}{2}-x}=\frac{2x-3}{2-x}$ folgt $\frac{1-k}{2}=2$ 6P.

und somit $k=-3$.

b) Aus $2x^2-k\cdot x+8k=0$ folgt $x=\frac{1}{4}\left(k\pm\sqrt{k\cdot\left(k-64\right)}\right)$.

Also hat die Parabel für $k=0$ oder $k=64$ genau eine Nullstelle und für $0<k<64$ keine Nullstelle. 6P.

---

5. a)

	Oktaeder	Oktaederstumpf	Kuboktaeder	Würfelstumpf	Würfel
e	6	24	12	24	8
f	8	14	14	14	6
k	12	36	24	36	12
$e+f-k$	2	2	2	2	2

6P.

b) (i) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{a}{2}$ 6P.

---

6. a) $g:y=-\frac{1}{2p}\cdot x+p^2+\frac{1}{2}$ bzw. $y-p^2=-\frac{1}{2p}(x-p)$. 4P.

b) Aus $q^2-p^2=-\frac{1}{2p}(q-p)$ folgt $q=-p-\frac{1}{2p}$ (wegen $q^2-p^2=(q-p)(q+p)$) 4P.

und somit $Q\left(-p-\frac{1}{2p}\middle|p^2+\frac{1}{4p^2}+1\right)$

c) $d=p+|q|=2p+\frac{1}{2p}$

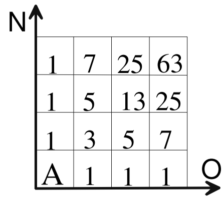
1. Lösung durch quadratische Ergänzung: 4P.

$d=2p+\frac{1}{2p}=2+\left(\sqrt{2p}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)^2$ wird minimal für $\sqrt{2p}-\frac{1}{\sqrt{2p}}=0$ also $p=\frac{1}{2}$.

2. Lösung durch Differentialrechnung:

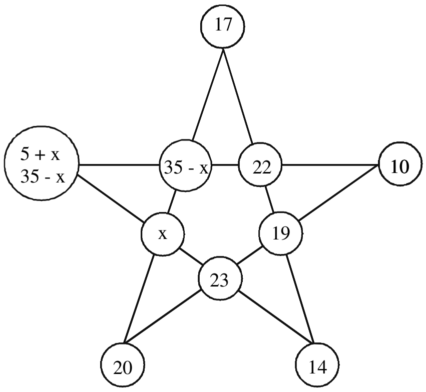
Aus $d'=2-\frac{1}{2p^2}=0$ folgt $p=\frac{1}{2}$. Wegen $d''=\frac{1}{p^3}>0$ für $p=\frac{1}{2}$ liegt ein Minimum vor, also $P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$.

7. a) In jedem Quadrat steht die Anzahl der Wege, die von A zu diesem Quadrat führen. **3P.**



Es gibt also 63 Wege von A nach B.

b) Aus $5+x=35-x$ folgt $x=15$. **3P.**

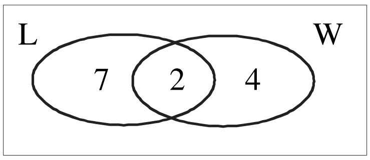


3P.

c) $z+2$ muss ein Teiler von 6 sein, d.h. 1, 2, 3 oder 6. Also $z=-1, 0, 1, 4$ **3P.**

d) $P=\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}+\frac{5}{16}=\frac{11}{32}\approx 34\%$

---

8. 

Im Diagramm sind L die Linkshänder und W die weiblichen Personen. Es sind $27-9-6+2=14$ Personen männliche Rechtshänder. **3P.**

b) Es sei n die Einwohnerzahl im Jahr 2000. Dann gilt $(n\cdot 1{,}2-200)\cdot 0{,}95=n+90$. Hieraus folgt $n=2000$. **3P.**

c) Pro Minute räumen **3P.**

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Carolin} & \frac{1}{15}\\ \text{Rahel} & \frac{1}{18}\\ \text{Hannah} & \frac{1}{24}\end{array}\right\}\text{ihres Zimmers auf.}$$

Zusammen räumen sie also pro Minute $\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}=\frac{59}{360}$ ihres Zimmers auf.

Somit brauchen sie $\frac{360}{59}$ Minuten ≈ 6 Minuten und 6 Sekunden.

d) Es gilt $365=52\cdot 7+1$ und für Schaltjahre $366=52\cdot 7+2$. **3P.**

Aus der Tabelle

Jahr	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Wochentag am 1. Januar	Fr	Sa	So	Di	Mi	Do	Fr

folgt, dass der 1.1.2016 wieder ein Freitag ist.