

Mathematikwettbewerb 2010 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.

Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. a) Gegeben seien die Punkte $A(2|7)$, $B(4|9)$ und $C(8|-3)$.

Sei D der Mittelpunkt der Strecke BC .

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch A und D .

Berechnen Sie im Dreieck ABC die Länge der zu A gehörenden Seitenhalbierenden.

- b) Gegeben seien die Punkte $O(0|0)$, $A(1|3)$ und $B(4|2)$.

Bestimmen Sie den Winkel α zwischen OB und OA .

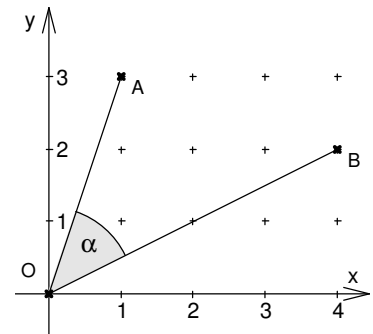
- c) Der Punkt $P(3|5)$ wird durch folgende Abbildungen in den Punkt Q überführt:

(i) Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.

(ii) 180° -Drehung um den Koordinatenursprung.

(iii) Spiegelung an der Geraden $x = -8$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von Q .



2. Zwei geordnete Paare reeller Zahlen werden folgendermaßen multipliziert:

$$(a,b) \times (c,d) := (ac - bd, ad + bc).$$

- a) Berechnen Sie $(-1,-2) \times (2,1)$ und $(0,-5) \times (0,1)$.

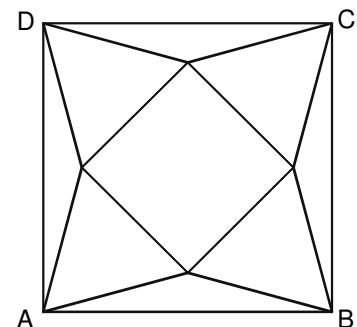
- b) Wie muss (x,y) gewählt werden, damit für alle $(a,b) \neq (0,0)$

(i) $(a,b) \times (x,y) = (a,b)$ gilt?

(ii) $(a,b) \times (x,y) = (1,0)$ gilt?

3. Über den Seiten eines Einheitsquadrates werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet. Die vier Ecken A, B, C, D der Dreiecke bilden ein Quadrat.

Berechnen Sie die Diagonalen, die Seite und die Fläche des Quadrates $ABCD$.

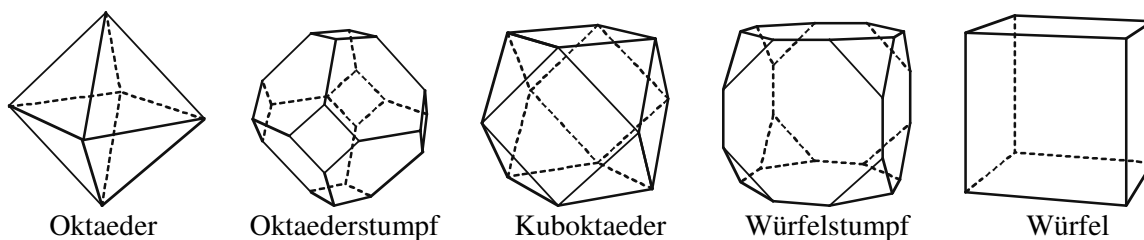


4. a) Sei k eine reelle Zahl und f die Funktion $f(x) = \frac{x+k}{1-x}$, $x \neq 1$.

Für welches k gilt $f(f(x)) = \frac{2x-3}{2-x}$?

- b) Für welche k hat die Parabel $f(x) = 2x^2 - kx + 8k$
- genau eine Nullstelle?
 - keine Nullstelle?

5. Schneidet man bei einem Oktaeder und bei einem Würfel die Ecken ab, so entsteht ein Oktaederstumpf bzw. ein Würfelstumpf. Gehen die Ebenen, mit denen die Ecken abgeschnitten werden, durch die Mitten der Kanten, so erhält man einen Kuboktaeder.



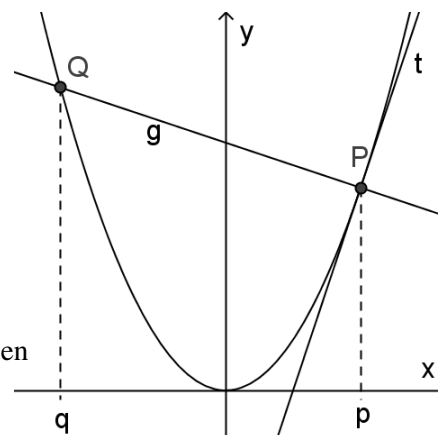
- a) Seien e , f und k die Anzahl der Ecken, Flächen bzw. Kanten. Ergänzen Sie die folgende Tabelle.

	Oktaeder	Oktaederstumpf	Kuboktaeder	Würfelstumpf	Würfel
e	6				8
f	8				6
k	12				12
$e + f - k$	2				2

- b) Welche Kantenlänge hat der Kuboktaeder, wenn
- der Würfel die Kantenlänge a hat?
 - der Oktaeder die Kantenlänge a hat?

6. Gegeben seien die Parabel durch $y = x^2$, ein Parabelpunkt $P(p|p^2)$, $p > 0$ und die Tangente t in P (Steigung $2p$).

- Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g durch P , die senkrecht auf der Tangente steht (in Abhängigkeit von p).
- Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes $Q(q|q^2)$ von g mit der Parabel (in Abhängigkeit von p).
- Wie muss P gewählt werden, damit der Abstand d zwischen den Abszissen von P und Q minimal wird, d.h. damit $p+|q|$ möglichst klein wird?



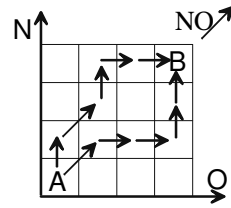
7. a) Um im 4×4 -Gitternetz von A nach B zu gelangen, sind drei Richtungen erlaubt:

Nach Norden N , nach Osten O und nach Nordosten NO .

In der Abbildung sind zwei Wege eingezeichnet:

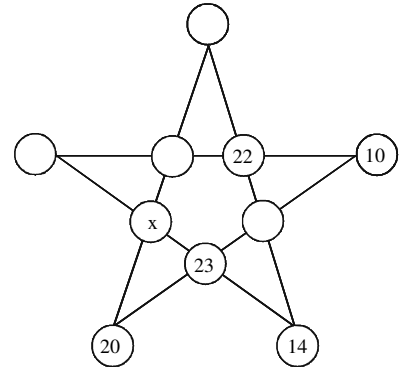
$N-NO-N-O-O$ und $NO-O-O-N-N$.

Wie viele Wege gibt es insgesamt von A nach B ?



- b) Im Pentagramm haben die vier Zahlen auf jeder der fünf Strecken die Summe 72. Einige Zahlen sind eingetragen.

Welche Zahl muss in dem mit x gekennzeichneten Feld stehen?



- c) Für welche ganzen Zahlen z ist $\frac{6}{z+2}$ eine natürliche Zahl?
- d) Fünf symmetrische Münzen werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass die Seite mit dem Wappen keinmal oder genau dreimal erscheint?

8. a) Über eine Gruppe von 27 Personen ist folgendes bekannt:

- Ein Drittel sind Linkshänder.
- Sechs Personen sind weiblich.
- Zwei der Linkshänder sind weiblich.

Wie viele Personen sind männliche Rechtshänder?

- b) Im Jahr 2007 lebten in Steinbach 20% mehr Menschen als im Jahr 2000. Im Jahr 2008 verließen 200 Personen Steinbach und 2009 zogen 5% der verbliebenen Einwohner weg. Danach hatte Steinbach 90 Einwohner mehr als im Jahr 2000.

Wie viele Einwohner hatte Steinbach im Jahr 2000?

- c) Zum Aufräumen ihres gemeinsamen Spielzimmers brauchen Carolyn 15 Minuten, Rahel 18 Minuten und Hannah 24 Minuten.

Wie lange brauchen die drei Geschwister, wenn sie alle gemeinsam aufräumen?

- d) Der 1. Januar 2010 war ein Freitag.

Welches ist das nächste Jahr, in dem der 1. Januar wieder ein Freitag ist?