

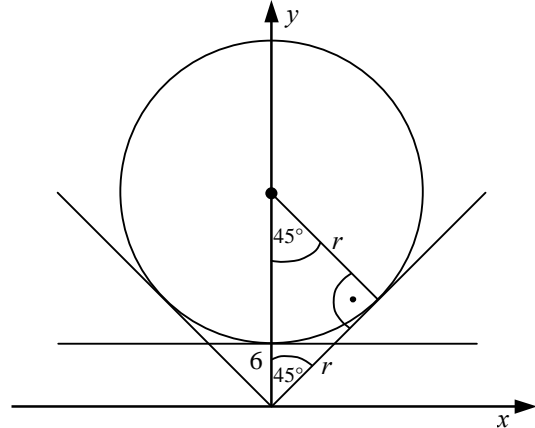
## Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2009 der Jahrgangsstufe 11

1. a) Die gesuchten Rechteckspunkte  $B$  und  $D$  liegen auf dem Thaleskreis über  $AC$  und sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Es gibt 5 Rechtecke:

$B$	$(-5 0)$	$(3 -4)$	$(4 -3)$	$(0 5)$	$(3 4)$
$D$	$(5 0)$	$(-3 4)$	$(-4 3)$	$(0 -5)$	$(-3 -4)$

- b) Für den Radius  $r$  des Kreises gilt  $6 + r = r\sqrt{2}$ , also

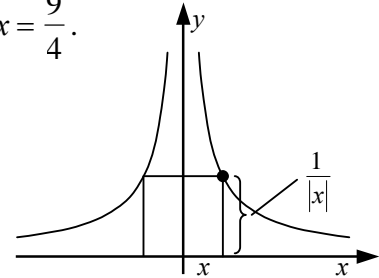
$$r = \frac{6}{\sqrt{2}-1} = 6 \cdot (\sqrt{2}+1)$$



2. a) Aus  $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$  folgt  $x^{x\sqrt{x}} = (x^x)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3x}{2}}$ . Die Gleichheit der Exponenten ergibt  $x\sqrt{x} = x \cdot \frac{3}{2}$ . Wegen  $x > 0$  folgt  $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$  und somit  $x = \frac{9}{4}$ .

b) Es gilt  $f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{2x}{x-1} = x$ ,

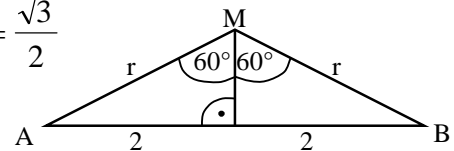
also  $f(f(2009)) = 2009$ .



- c) Für die Quadratseiten gilt  $2x = \frac{1}{x}$ , also  $x^2 = \frac{1}{2}$ . Die Fläche ist  $4x^2 = 2$ .

3. a) Der Mittelpunktswinkel  $AMB$  ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel  $ACB$ . Also gilt  $\frac{2}{r} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

und somit  $r = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ .



- b) Für die drei Radien  $r_a, r_b, r_c$  gelten die 3 Gleichungen  $r_a + r_b = 5$ ,  $r_b + r_c = 4$  und  $r_c + r_a = 3$ . Hieraus folgt  $r_a = 2$ ,  $r_b = 3$  und  $r_c = 1$ .

- c) Alle vier Dreiecke im Sechseck haben die gleiche Fläche, denn es gilt z.B. mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen  $b$  und Hypotenuse  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(180^\circ - \alpha).$$

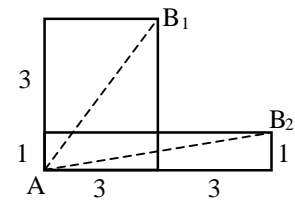
Somit ist die Fläche des Sechsecks

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab = 2 \cdot (a^2 + b^2 + ab).$$

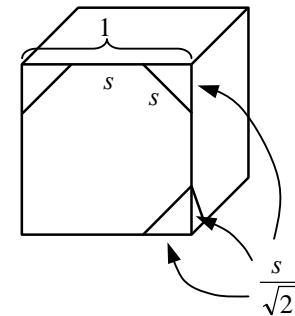


4. a) Mit  $t = 4x$  gilt  $f\left(\frac{t}{2}\right) = f(2x) = \left(\frac{t}{4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{t}{4} + 1 = -\frac{11}{4}$ .  
Also gilt  $t^2 + 16t + 60 = 0$  und somit  $t = -8 \pm 2$ , d.h.  $t = -10$  oder  $t = -6$ .
- b) Aus  $f(f(x)) = a(ax+b)+b = 2x+4$  folgt  $a^2 = 2$  und  $ab+b = 4$ ,  
also  $a = \sqrt{2}$  und  $b = \frac{4}{a+1} = \frac{4}{\sqrt{2}+1} = 4 \cdot (\sqrt{2}-1)$ .
- c) Es gilt  $f(0) = d = 2$ ,  $f(-1) = -a+b-c+2 = 0$  und  $f(1) = a+b+c+2 = 0$ .  
Also  $b = -2$ .

5. a) Faltet man die vorderen drei Flächen der Schachtel in die Ebene, so ist die gesuchte Entfernung die Streckenlänge  $AB_1$  oder  $AB_2$ . Wegen  
 $AB_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  und  $AB_2 = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} > 5$  ist  
 $AB_1 = 5$  der kürzeste Weg.



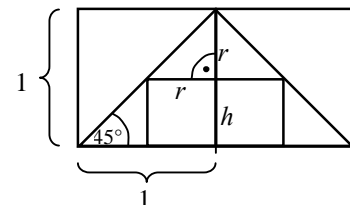
- b) Für die Schnittkante  $s$  gilt  $s + 2 \frac{s}{\sqrt{2}} = 1$ ,  
also  $s = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ . Die acht abgeschnittenen  
Ecken sind Pyramiden mit Höhe  $\frac{s}{\sqrt{2}}$ , die Grundfläche  
ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit den  
Katheten  $\frac{s}{\sqrt{2}}$ . Also ist das Gesamtvolumen



$$8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot s^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sqrt{2}-1)^3 = \frac{1}{3} (10 - 7\sqrt{2}).$$

- c) Für die Mantellinie  $r$  des Kegels gilt  $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ . Die Kegelgrundfläche hat  
den Umfang  $2\pi \cdot 3$  und es gilt  $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 3}{2\pi \cdot 5}$ , also  $\alpha = 216^\circ$ .

6. a) Durch Ausmultiplizieren ergibt sich  
 $f(x) = x^2 - x^3$ , also  $a = -1$  und  $b = 1$ .  
 $f$  wird maximal für  $x = \frac{2}{3}$  mit  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ .



- b) Aus  $r+h=1$  folgt für das Volumen  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot (1-r) = \pi \cdot (r^2 - r^3)$ .  
Nach a) ist  $V$  maximal für  $r = \frac{2}{3}$  und  $h = \frac{1}{3}$ .



7. a) Die Quadrate  $p^2$  von Primzahlen  $p$ . Die Teiler von  $p^2$  sind  $1, p, p^2$ .
- b) Teiler treten immer paarweise auf, z.B.  $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ . Bei Quadratzahlen  $n^2$  wird der Teiler  $n$  nur einmal gezählt, d.h. Quadratzahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern.
- c) 30 hat die Teiler 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 und es gilt  $(1 \cdot 30) \cdot (2 \cdot 15) \cdot (3 \cdot 10) \cdot (5 \cdot 6) = 30^4 = 81 \cdot 10^4$ . Analog erhält man  $n^k$ .
- d)  $n$  hat die Teiler 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35,  $n$  und es gilt  $1 \cdot n = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$ , also  $n = 105$ .

8. a) **1. Lösungsweg:** Angenommen Hokus lügt, dann wäre er der Älteste. Aber Pokus und Krokus würden dann auch lügen. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass genau einer die Wahrheit sagt. Also sagt Hokus die Wahrheit und zusammen mit der Aussage von Krokus ist Hokus der Mittlere. Da Pokus lügt, muss Krokus der Jüngste sein.

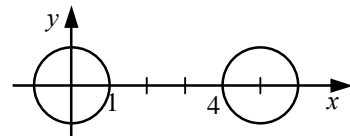
**2. Lösungsweg:** Für die Reihenfolge vom Jüngsten bis zum Ältesten gibt es 6 Möglichkeiten (w: wahr | f: falsch)

	KHP	KPH	HKP	HPK	PKH	PHK
Pokus sagt die Wahrheit	f	f	f	w	f	w
Krokus sagt die Wahrheit	f	f	w	w	f	f
Hokus sagt die Wahrheit	w	f	w	w	f	w

Hieraus folgt als einzige Möglichkeit die Reihenfolge KHP.

- b) Es gilt  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{100-a} = \frac{100}{a(100-a)} = \frac{100}{50^2 - (a-50)^2}$ . Damit  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  minimal wird, muss der Nenner  $50^2 - (a-50)^2$  möglichst groß sein, also für  $a = 50$  (und  $b = 50$ ).

- c) Die Graphen sind zwei Kreise mit Mittelpunkt in  $(0|0)$  und  $(5|0)$ . Die kleinste Entfernung ist 3.



- d) Sei  $s$  die Anzahl der Schüler und  $n$  die Anzahl der Hotelzimmer. Dann gilt  $2n = s - 2$  und  $3n = s + 6$ . Also  $s = 18$  und  $n = 8$ .