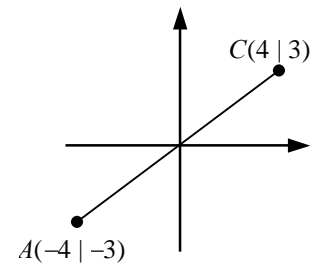


## Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 18.02.2009

**Hinweis:** Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

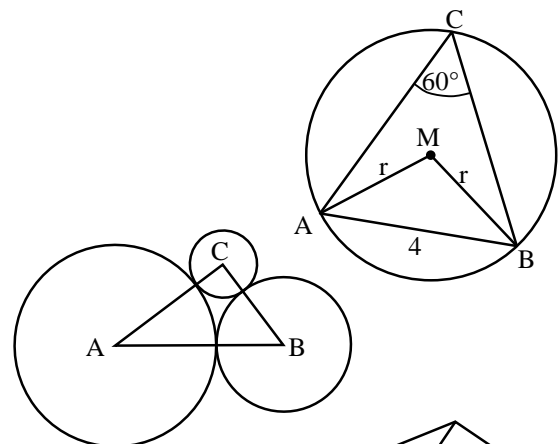
Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2009 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW11.

1. a) Die Strecke  $AC$  mit  $A(-4|-3)$  und  $C(4|3)$  ist die Diagonale eines Vierecks  $ABCD$ .  
Bestimmen Sie alle Punkte  $B$  und  $D$  mit ganzzahligen Koordinaten so, dass  $ABCD$  ein Rechteck ist.
- b) Ein Kreis mit Mittelpunkt  $(0|m)$ ,  $m > 6$ , hat die Tangenten  $y = x$ ,  $y = -x$  und  $y = 6$ .  
Berechnen Sie den Radius  $r$  dieses Kreises.



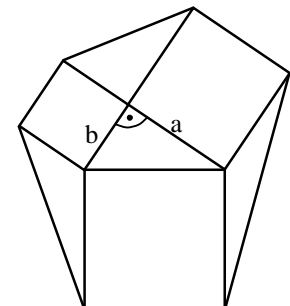
2. a) Lösen Sie für  $x > 0$  die Gleichung  $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ .
- b) Es sei  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Berechnen Sie  $f(f(2009))$ .
- c) Bei einem Quadrat liegt eine Seite auf der  $x$ -Achse und die anderen Ecken auf der Kurve  $y = \frac{1}{|x|}$ . Berechnen Sie die Fläche des Quadrats.

3. a) Die drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $M$ .  
Es ist  $AB = 4$  und  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ .  
Berechnen Sie den Radius  $r$  des Kreises.



- b) Die Seiten eines Dreiecks  $ABC$  seien 3, 4 und 5. Die Ecken des Dreiecks sind Mittelpunkte von drei Kreisen, die sich von außen berühren (vgl. Abbildung).  
Berechnen Sie die Radien der Kreise.

- c) Auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden Quadrate errichtet und die Figur zu einem Sechseck ergänzt.  
Berechnen Sie die Fläche des Sechseck in Abhängigkeit von den Katheten  $a$  und  $b$ .





4. a) Für eine Funktion  $f$  gilt:  $f(2x) = x^2 + 4x + 1$ .

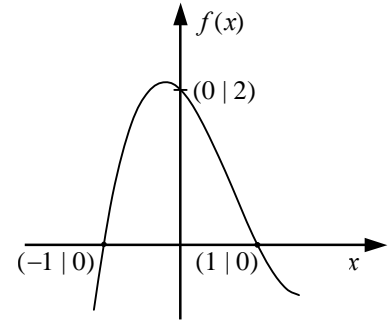
Für welche Werte  $t$  gilt  $f\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{11}{4}$ ?

- b) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = ax + b$ .

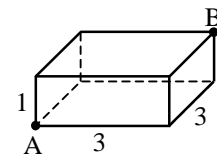
Für welche positiven  $a$  und  $b$  gilt  $f(f(x)) = 2x + 4$ ?

- c) Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen von  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

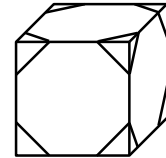
Berechnen Sie die Koeffizienten  $b$  und  $d$ .



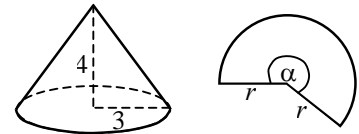
5. a) Eine quaderförmige Schachtel hat eine  $3 \times 3$  Grundfläche und die Höhe 1. Eine Spinne möchte von einer Ecke A zur gegenüberliegenden Ecke B krabbeln. Berechnen Sie den kürzesten Weg auf der Oberfläche der Schachtel.



- b) Die Ecken eines Einheitswürfels werden so abgeschnitten, dass auf den Seitenflächen regelmäßige Achtecke entstehen. Berechnen Sie das Gesamtvolumen der abgeschnittenen Tetraeder.

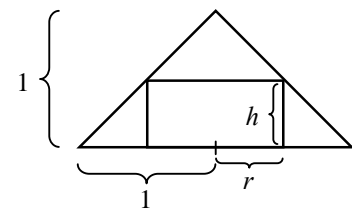


- c) Ein Kegel habe die Höhe 4 und den Radius 3. Seine Mantelfläche ist in der Ebene ein Kreissektor. Berechnen Sie dessen Mittelpunktswinkel  $\alpha$  und dessen Radius  $r$ .



6. a) Für das Polynom  $f(x) = ax^3 + bx^2$  gilt  $f(x) = \frac{4}{27} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$ . Berechnen Sie die Koeffizienten  $a$  und  $b$ . Für welches positive  $x$  hat  $f$  ein Maximum?

- b) Einem Kegel mit Höhe 1 und Radius 1 ist ein Zylinder mit Höhe  $h$  und Radius  $r$  einbeschrieben. Wie müssen  $r$  und  $h$  gewählt werden, damit das Zylindervolumen  $V$  maximal wird?



7. Die folgenden Fragen beziehen sich auf die natürlichen Zahlen  $1, 2, 3, \dots$ .

- a) Welche Zahlen haben genau drei Teiler? (z.B. hat 9 die Teiler 1, 3 und 9)
- b) Welche Zahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern?
- c) Welche Zahl erhält man, wenn man alle Teiler von 30 multipliziert? Welches Ergebnis erhält man für eine Zahl  $n$ , die  $2k$  Teiler hat?
- d) Die Zahl  $n$  habe genau acht Teiler. Zwei dieser Teiler sind 15 und 21. Bestimmen Sie  $n$ .



8. a) Wenn immer man den Brüdern Hokus, Pokus und Krokus eine Frage stellt, lügen zwei und einer sagt die Wahrheit. Auf die Frage, wer der Jüngste sei, antwortet  
Pokus: „Krokus ist der Älteste.“  
Krokus: „Hokus ist der Jüngste.“  
Hokus: „Ich bin nicht der Älteste.“  
Entscheiden Sie aufgrund dieser Aussagen, wer der Jüngste ist.
- b) Für zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  gilt  $a + b = 100$ . Wie müssen  $a$  und  $b$  gewählt werden, damit  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  minimal wird?
- c) Zeichnen Sie die Graphen von  $x^2 + y^2 = 1$  und  $(x - 5)^2 + y^2 = 1$ . Welches ist die kleinste Entfernung zwischen den Graphen?
- d) Bei einem Klassenausflug mit Übernachtung in einem Hotel wird festgestellt, dass es bei der Belegung der Hotelzimmer mit je 2 Schülern für 2 Schüler kein Zimmer mehr gibt. Wenn jeweils 3 Schüler ein Zimmer teilen, bleiben 2 Zimmer leer. Wie viele Zimmer hat das Hotel und wie groß ist die Klasse?
-