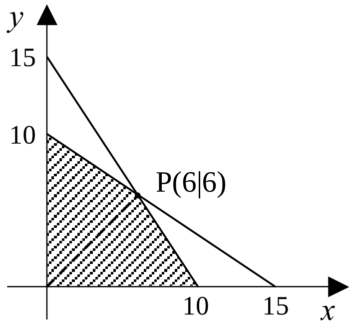
Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2008 der Jahrgangsstufe 11



1. a) Da g und h symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden sind, liegt P auf dieser und es ist P(6 | 6).

   b) Wegen $g: \frac{x}{10}+\frac{y}{15}=1$ und $h: \frac{x}{15}+\frac{y}{10}=1$ ist die Fläche $2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\right)=60$

   c) Wegen $P\left(\frac{a\cdot b}{a+b}\,|\,\frac{a\cdot b}{a+b}\right)$ ist die Fläche $2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\cdot b}{a+b}\right)=\frac{a^2b}{a+b}$.

---

2. a) Aus $8^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{3}}=\frac{7}{3-\sqrt{2}}$ folgt $x^{\frac{1}{3}}=\frac{7\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}-\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}=3+\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$ und somit $x=27$.

   b) Aus $\sqrt{4^4}=a^b$ folgt $a^b=16$, also $(a\,|\,b)=(16\,|\,1)$, $(4\,|\,2)$ oder $(2\,|\,4)$.

   c) Aus $85^2+a^2=b^2$ und $b=a+1$ folgt $85^2=b^2-a^2=(b+a)(b-a)=b+a=2a+1$ und somit $a=\frac{1}{2}\cdot\left(85^2-1\right)=3612$ und $b=3613$.

---

3. a) Ein Halbkreis mit Durchmesser d hat die Fläche $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi=\frac{d^2}{8}\cdot\pi$.

   Hat das Dreieck die Seiten $a, a, a\sqrt{2}$, so gilt $\frac{a^2}{8}\pi+\frac{a^2}{8}\pi+\frac{(a\sqrt{2})^2}{8}\pi=200\pi$,

   also $a^2=400$ und die Dreiecksfläche ist $\frac{1}{2}a^2=200$.

   b) Ein regelmäßiges 5-Eck hat 108°-Winkel. Also ist $\sphericalangle$ BAC = 360° – 108° – 90° = 162° und $\sphericalangle$ ACB $=\frac{1}{2}\left(180°-162°\right)=9°$.

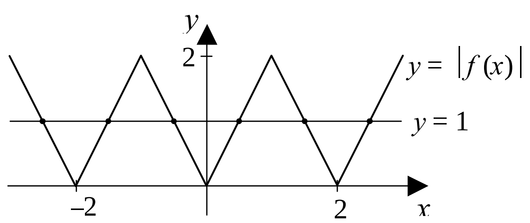
---

4. a) Für $x=2$ und $x=-1$ gilt $3f(2)+2f(-1)=13$ und $3f(-1)+2f(2)=7$. Hieraus folgt $9f(2)-4f(2)=13\cdot 3-7\cdot 2$ und somit $f(2)=5$.

   b) Wegen $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ folgt – unabhängig von x –

   $$\log_7(\tan x)-\log_7(\sin x)+\log_7(\cos x)=\log_7(\tan x)-\log_7\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=0\,.$$

   c) Aus der Abbildung entnimmt man, dass $g(x)=|\,f(x)\,|-1$ sechs Nullstellen hat.



5. a) Das Sechseck hat die Seitenlänge $\sqrt{2}$ und die Fläche $6 \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

b) Alle Abstände von A zu den Ecken des Sechsecks sind gleich. Hieraus folgt, dass die Raumdiagonale durch A senkrecht auf der Sechseckfläche steht. Sechseck und Würfel haben denselben Mittelpunkt, also ist der Abstand $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$.

---

6. a) Für $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ist g maximal mit $g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Es gilt $g(x) = x - x^3$.

b) Wegen $h^2 + 4r^2 = 1^2$ gilt für das Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4}\left(h - h^3\right)$.

1. Lösung: Nach a) ist V maximal für $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi}{18}\sqrt{3}$.

Es ist $r = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

2. Lösung: Aus $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}\left(1 - 3h^2\right) = 0$ folgt $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Wegen $\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi}{2}h < 0$ liegt ein Maximum vor.

---

7. a) Es gibt $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ Dreiecke.

b) Jeder der 12 Punkte gehört zu einem gleichseitigen Dreieck; jedes dieser Dreiecke wird dreimal gezählt, also gibt es $\frac{12}{3} = 4$ gleichseitige Dreiecke.

c) Zu jedem der 6 Durchmesser gibt es 10 rechtwinklige Dreiecke, also insgesamt $6 \cdot 10 = 60$.

d) Zu jedem der 6 Durchmesser gibt es 4 Dreiecke mit 30°- 60°- 90°- Winkel, also insgesamt $6 \cdot 4 = 24$.

---

8. a) Wenn s der Schulweg ist, so ergibt die Zeitdifferenz $\frac{s}{10} - \frac{s}{12} = \frac{1}{30}$, also

$s = \frac{10 \cdot 12}{30 \cdot (12 - 10)} = 2$ (km). Ist t die Fahrzeit, bei der er pünktlich ist,

so gilt $10\left(t + \frac{1}{60}\right) = 12\left(t - \frac{1}{60}\right)$ also $t = \frac{11}{60}$ (= 11min).

Die zugehörige Geschwindigkeit ist $\frac{2}{\frac{11}{60}} = \frac{120}{11}$ ($\approx 10{,}9$ km/h).

b) Ist e das Alter von Esther Ende 2003, so gilt $(2003 - e) + (2003 - 2e) = 3901$, also $e = 35$. Im Jahr 2008 ist Esther also 40 Jahre alt.

c) Nach n Reparaturen soll gelten $200 \cdot \left(1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + 1{,}1^3 + ... + 1{,}1^{n-1}\right) > 2000$. Hieraus folgt $\frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1} > 10$ also $1{,}1^n > 2$. Wegen $1{,}1^7 < 2 < 1{,}1^8$ haben die Kosten nach 8 Reparaturen den Anschaffungspreis zum ersten Mal überschritten.