



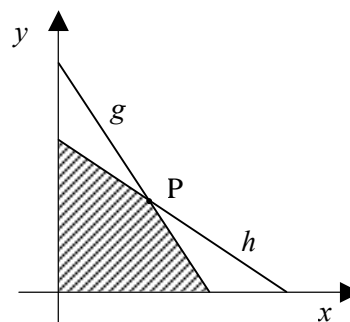
Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 13.02.2008

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2008 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW11.

1. Gegeben sind die Geraden
 $g: 3x + 2y = 30$ und $h: 2x + 3y = 30$.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P von g und h .
- b) Wie groß ist die (schraffierte) Fläche, die von g , h und den Koordinatenachsen begrenzt wird?
- c) Berechnen Sie die (schraffierte) Fläche auch für den Fall, dass die Geraden $g: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und $h: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ mit $0 < a < b$ gegeben sind.



2. a) Für welches x gilt $8^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3 - \sqrt{2}}$?
- b) Für welche Paare natürlicher Zahlen (a, b) gilt $\sqrt{4^a} = a^b$?
- c) Es gilt:

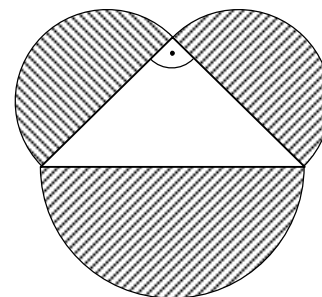
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

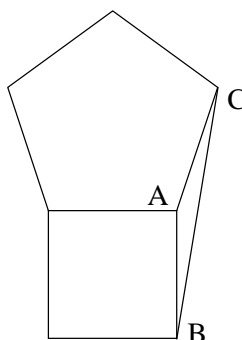
$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$$

Für welche positiven Zahlen a und b gilt $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + a^2 = b^2$?

3. a) Jede Seite eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks ist der Durchmesser eines Halbkreises. Die Summe der Halbkreisflächen ist 200π . Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.



- b) Ein regelmäßiges Fünfeck und ein Quadrat haben eine Seite gemeinsam. Wie groß ist der Winkel ACB?





4. a) Für eine Funktion f gilt $3 \cdot f(x) + 2 \cdot f(1-x) = 2x + 9$.

Berechnen Sie $f(2)$.

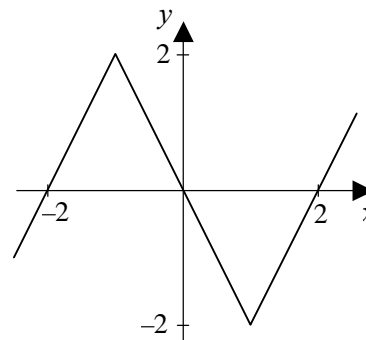
Hinweis: Wählen Sie $x = -1$ und $x = 2$.

- b) Berechnen Sie für $x = \frac{1}{7}$ den Term

$$\log_7(\tan x) - \log_7(\sin x) + \log_7(\cos x).$$

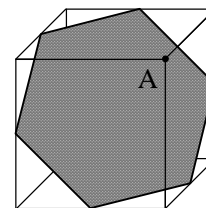
- c) Die Funktion f hat die nebenstehende Darstellung.

Wie viele Nullstellen hat die Funktion $g(x) = |f(x)| - 1$?



5. Im Kantenmodell eines Würfels (Kantenlänge 2) werden Kantenmitten so verbunden, dass ein Sechseck entsteht.

- a) Berechnen Sie die Seiten und die Fläche des Sechsecks.
b) Welchen Abstand hat der Punkt A von der Sechseckfläche?



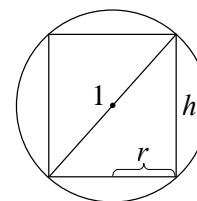
6. a) Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9} - \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Für welche positive x hat g ein Maximum? Wie groß ist dieser größte Funktionswert? Vereinfachen Sie g zu einem Polynom 3. Grades, indem Sie die Klammern ausmultiplizieren.

- b) Gegeben ist eine Kugel mit Durchmesser 1, der ein Kreiszyylinder einbeschrieben ist.

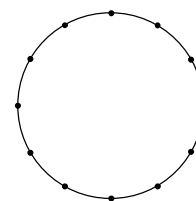
Wie müssen Höhe h bzw. Radius r gewählt werden, damit das Zylindervolumen maximal ist?

Hinweis: Falls Sie Teil a) dieser Aufgabe erfolgreich bearbeitet haben, lässt sich diese Extremwertaufgabe auch ohne Differenzialrechnung lösen.



7. Auf einem Kreis sind 12 Punkte so verteilt, dass benachbarte Punkte gleichen Abstand haben. Verbindet man 3 der 12 Punkte, erhält man ein Dreieck.

- a) Wie viel Dreiecke gibt es?
b) Wie viele der Dreiecke sind gleichseitig?
c) Wie viele der Dreiecke sind rechtwinklig?
d) Wie viele der Dreiecke haben 30° - 60° - 90° - Winkel?



8. a) Tristan fährt mit dem Fahrrad zur Schule. Wenn er 10 km/h fährt, kommt er 1 Minute zu spät an. Wenn er 12 km/h fährt, ist er eine Minute zu früh da. Wie lang ist sein Schulweg? Bei welcher Geschwindigkeit wäre er pünktlich?
b) Ende 2003 war Esther halb so alt wie ihre Oma. Die Summe der Jahre, in denen sie beide geboren wurden, ist 3901. Wie alt wird Esther Ende 2008 sein?
c) Als Herr Meier sich für 2000 Euro einen Gebrauchtwagen kaufte, benötigte dieser Reparaturen. Die erste Reparatur kostete 200 Euro. Jede der folgenden Reparaturen kostete 10 % mehr als die vorangegangene. Nach wie vielen Reparaturen konnte Herr Meier zum ersten Mal sagen: „Ich habe für die Reparaturen insgesamt mehr ausgegeben als für den Kauf des Wagens“?