Mathematikwettbewerb 2008 der Jahrgangsstufe 11

Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Es sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

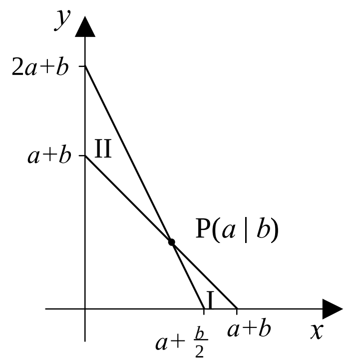
1. a) Aus $\frac{y-b}{x-a}=-1$ und $\frac{y-b}{x-a}=-2$ folgt $g: y=-x+a+b$ und $h: y=-2x+2a+b$. 4 P

b) Mit Hilfe der Achsenabschnitte $g: \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a+b}=1$

und $h: \frac{x}{a+\frac{b}{2}}+\frac{y}{2a+b}=1$ folgt für die Flächen 4 P

$I: \quad \frac{1}{2}\cdot\left(a+b-\left(a+\frac{b}{2}\right)\right)\cdot b=\frac{b^2}{4}$ und

$II: \quad \frac{1}{2}\cdot\left(2a+b-(a+b)\right)\cdot a=\frac{a^2}{2}$.



c) Die Flächen sind gleich für $b=a\sqrt{2}$. 4 P

2. a) Aus $x^{2008}-x^{2006}=x^{2007}-x^{2005}$ folgt $x^{2006}(x^2-1)=x^{2005}(x^2-1)$, 4 P
und somit $x^{2005}(x-1)(x^2-1)=0$. Also ist $x = 0$, 1 oder –1.

b) Aus $2^4+a^b=2^5$ folgt $a^b=16$ und somit $(a\,|\,b)=(16\,|\,1)$, $(4\,|\,2)$ oder $(2\,|\,4)$. 4 P

c) Aus $13^2+a^2=b^2$ und $b=a+1$ folgt $13^2=b^2-a^2=(b+a)(b-a)=b+a=2a+1$ also 4 P
$a=\frac{1}{2}\cdot(169-1)=84$ und $b=85$.

3. a) Ein Halbkreis mit Durchmesser d hat die Fläche $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi$. Also hat das Dreieck die Seiten 6P
$6\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$ und $10\sqrt{2}$. Dreiecksfläche: $\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}=48$.

b) Die Winkel im regelmäßigen 5-Eck sind 108°. Somit gilt $\sphericalangle PAE$ = 108° – 60° = 48° und 6 P
$\sphericalangle EPA=\frac{1}{2}\cdot(180°-48°)=66°$. Also $\sphericalangle CPE=360°-60°-2\cdot 66°=168°$.

4. a) $f(100) = f(10 \cdot 10) = f(10) + f(10) = 2 \cdot f(2 \cdot 5) = 2 \cdot \left(f(2) + f(5) \right) = 2 \cdot (500 + 504) = 2008$ *4 P*

b) Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt aus $2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot 2^{\tan^2 x} = 2^2$ zunächst $2^{\tan^2 x} = 2$ und somit $\tan^2 x = 1$, also $x = \dfrac{\pi}{4}$. *4 P*

c) Wegen $f(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}$ hat die Gleichung $x^3 - x + a = 0$, d.h. $f(x) + a = 0$ für $a = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$ genau zwei reelle Nullstellen. *4 P*

---

5. a) Das Viereck ABCD ist eine Raute, d.h. alle Seitenlängen sind $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. *3 P*

b) $BD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ und $AC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ *3 P*

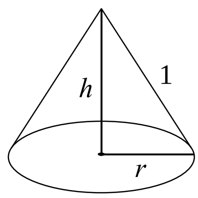
c) Fläche: $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 2\sqrt{6}$ *3 P*

d) Für α = ∢BAD gilt $\cos\alpha = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \dfrac{5 + 5 - 8}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$ (Kosinussatz). *3 P*

---

6. a) Für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hat f ein Maximum mit $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Es gilt $f(x) = x - x^3$. *6 P*

b) Wegen $r^2 + h^2 = 1^2$ gilt für das Volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(h - h^3\right)$. *6 P*



<u>1. Lösung:</u> Nach a) ist V maximal für $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und zwar gilt

$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. Es ist $r = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

<u>2. Lösung:</u> Aus $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}\left(1 - 3h^2\right) = 0$ folgt $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Wegen $\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h < 0$ liegt ein Maximum vor.

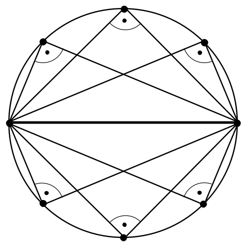
---

7. a) Es gibt $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ Dreiecke. *4 P*

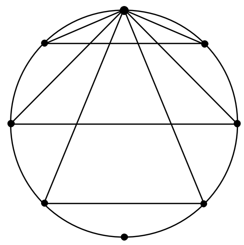
b) Zu jedem der 4 Durchmesser gibt es 6 rechtwinklige Dreiecke, also insgesamt $4 \cdot 6 = 24$. *4 P*

c) Zu jedem der 8 Punkte gibt es 3 gleichschenklige Dreiecke, also insgesamt $8 \cdot 3 = 24$. *4 P*

zu b)



zu c)



8. a) Für den Arbeitsweg s ergibt die Zeitdifferenz $\frac{s}{20}-\frac{s}{30}=\frac{1}{2}$, also $s=\frac{20\cdot 30}{2\cdot(30-20)}=30$ (km). *4 P*

Ist t die Zeit, die Carla braucht, um pünktlich zu sein, so gilt $30\left(t-\frac{1}{4}\right)=20\left(t+\frac{1}{4}\right)$,

also $t=\frac{5}{4}$ mit der zugehörigen Geschwindigkeit $\frac{30}{\frac{5}{4}}=24$ (km/h).

b) Sind l und s das heutige Alter von Lucas und Samuel, so folgt aus der Tabelle für die konstante Altersdifferenz $s-l=l+4-s$, also ist Samuel $s-l=2$ Jahre älter als Lucas. *4 P*

	Heute	Zukunft
Lucas	l	s
Samuel	s	$l+4$

c) Ist n die Bevölkerungszahl von Aland vor 2004, so ist sie nach 4 Jahren $n\cdot 1{,}25\cdot 1{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75=n\cdot 0{,}9$. Also verringert sich die Bevölkerung um 10%. *4 P*

Für Ihre Auswertung (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse der Einzelaufgaben:

Aufgabe	Anzahl der Schüler/innen: Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnis:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **28. März 2008** die Schulsiegerin bzw. den Schulsieger zu melden (Vorname, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl); diese erhalten, wenn sie mindestens 30 Punkte erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis.
Bei **50 oder mehr Punkten** bitte die Bearbeitung im **Original** zuschicken.