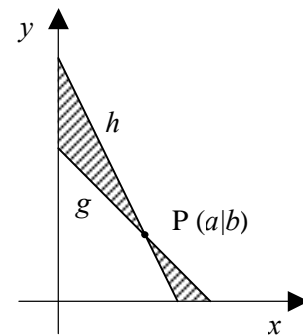


Mathematikwettbewerb 2008 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

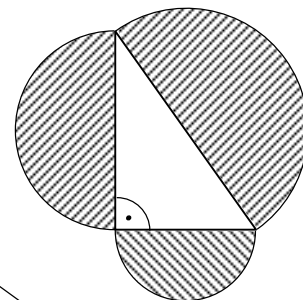
1. Gegeben ist ein Punkt $P(a|b)$ im 1. Quadranten sowie die Gerade g und h durch P mit den Steigungen -1 und -2 .
- Welche Gleichungen haben die Geraden g und h (in Abhängigkeit von a und b) ?
 - Welche Fläche haben die beiden (schraffierten) Dreiecke, die von g und h sowie der x -Achse bzw. y -Achse begrenzt werden?
 - Wie müssen a und b gewählt werden, damit die beiden Dreiecke flächengleich sind?



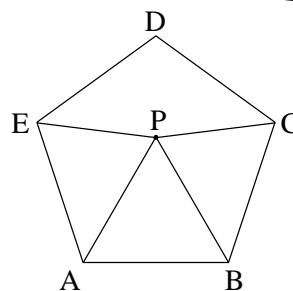
2. a) Für welche x gilt $x^{2008} - x^{2006} = x^{2007} - x^{2005}$?
- b) Für welche Paare natürlicher Zahlen $(a|b)$ gilt $2^4 + a^b = 2^5$?
- c) Es gelten die folgenden Gleichungen: .
- $$3^2 + 4^2 = 5^2$$
- $$5^2 + 12^2 = 13^2$$
- $$7^2 + 24^2 = 25^2$$
- $$9^2 + 40^2 = 41^2$$
- $$11^2 + 60^2 = 61^2$$

Für welche positiven ganzen Zahlen a und b gilt $13^2 + a^2 = b^2$?

3. a) Die Halbkreise über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks haben die Flächen 9π , 16π und 25π . Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.



- b) In der Abbildung ist ABCDE ein regelmäßiges Fünfeck und ABP ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist der Winkel CPE?



Dieser Wettbewerb wird veranstaltet von:



Zentrum für
Mathematik e.V.

in Kooperation mit:



Hessisches
Kultusministerium

Ciba



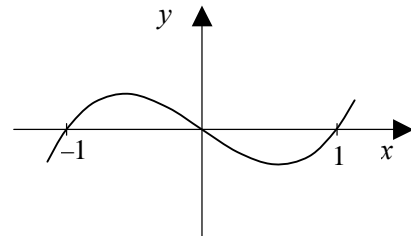
Ciba Spezialitätenchemie
Lampertheim GmbH

4. a) Gegeben ist eine Funktion f , bei der für alle positiven Zahlen a und b gilt $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$.
Wenn $f(2) = 500$ und $f(5) = 504$ gilt, welches ist dann der Funktionswert $f(100)$?

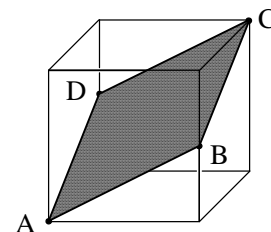
- b) Für welche Winkel x , $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, gilt $2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot 2^{\tan^2 x} = 2^2$?

- c) Für $-1 \leq x \leq 1$ hat $f(x) = x^3 - x$ ein Minimum bei $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und ein Maximum bei $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Für welche Werte von a hat $x^3 - x + a = 0$ genau zwei verschiedene reelle Lösungen?



5. Im Kantenmodell eines Würfels (Kantenlänge 2) werden die gegenüberliegenden Ecken A und C mit den Mitten B und D gegenüberliegender Kanten verbunden. Bestimmen Sie im Viereck ABCD

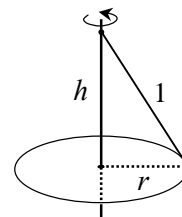


- a) die Länge der Seiten,
b) die Längen der Diagonalen,
c) die Fläche des Vierecks,
d) den Kosinus von \sphericalangle BAD.

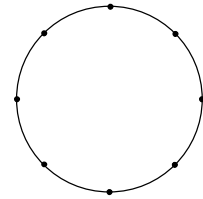
6. a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Für welches positive x hat f ein Maximum? Wie groß ist dieser maximale Funktionswert? Schreiben Sie f vereinfacht als Polynom 3. Grades, indem Sie die Klammern ausmultiplizieren.

- b) Eine Strecke der Länge 1 rotiert um eine Achse und erzeugt dabei einen Kegel. Wie muss der Radius r bzw. die Höhe h des Kegels gewählt werden, damit das Kegelvolumen maximal wird?
Hinweis: Benutzen Sie Teil a) der Aufgabe, falls Sie diese Extremwertaufgabe ohne Differentialrechnung lösen wollen.



7. Auf einem Kreis sind 8 Punkte gleichmäßig verteilt, d.h. benachbarte Punkte haben gleiche Abstände.



- a) Wie viele Dreiecke gibt es, deren Ecken drei der acht Punkte sind?
- b) Wie viele der Dreiecke sind rechtwinklig?
- c) Wie viele der Dreiecke sind gleichschenkelig?

- 8.
- a) Wenn Carla mit 20 km/h zur Arbeitsstelle fährt, kommt sie eine viertel Stunde zu spät zur Arbeit. Wenn sie mit 30 km/h fährt, ist sie eine viertel Stunde vor Arbeitsbeginn da. Wie lang ist ihr Arbeitsweg? Mit welcher Geschwindigkeit muss sie fahren, um pünktlich zu sein?
 - b) Wenn Lucas so alt sein wird wie Samuel heute ist, dann wird Samuel vier Jahre älter sein wie Lucas heute ist. Um wie viele Jahre ist Samuel älter als Lucas?
 - c) Die Bevölkerung von Aland vergrößerte sich 2004 um 25% und 2005 um 20%. Aber 2006 verringerte sie sich um 20% und 2007 um 25%. Um wie viel Prozent hat sich die Bevölkerung innerhalb dieser 4 Jahre verändert?

