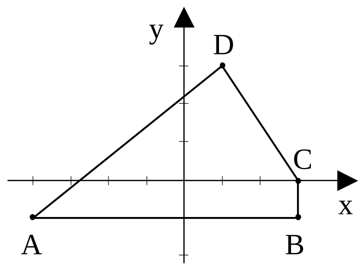
Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2007 der Jahrgangsstufe 11



1. a) Fläche des Viereck ABCD: $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(1+4)\cdot 2=15$.

Die Gerade durch D mit der Steigung m hat die Gleichung $y=m\cdot(x-1)+3$ und schneidet AB in $E(1-\frac{4}{m}\,|\,-1)$.

Fläche von Dreieck AED: $\frac{1}{2}\cdot\left(4+1-\frac{4}{m}\right)\cdot 4=2\cdot\left(5-\frac{4}{m}\right)$.

Aus $10-\frac{8}{m}=\frac{15}{2}$ folgt $m=\frac{16}{5}$. Also hat die gesuchte Gerade die Gleichung $y=\frac{16}{5}x-\frac{1}{5}$.

b) <u>Rechter Winkel bei A bzw. B</u>: Die Steigung von AB ist $m=5$. Die Gerade durch A (bzw. B) mit Steigung $-\frac{1}{m}=-\frac{1}{5}$ hat die Gleichung $y=-\frac{1}{5}\cdot(x-2)$ (bzw. $y=-\frac{1}{5}\cdot(x-3)+5$) und schneidet die y-Achse in $C(0\,|\,\frac{2}{5})$ (bzw. $C(0\,|\,\frac{28}{5})$).

<u>Rechter Winkel bei C</u>: Für die Steigung AC: $-\frac{c}{2}$ und BC: $\frac{5-c}{3}$ muss gelten

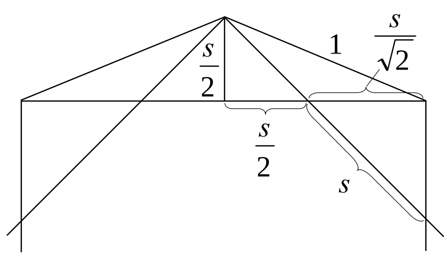
$-\frac{c}{2}\cdot\frac{5-c}{3}=-1$. Also $c=2$ oder $c=3$.

---

2. a) Wegen $a+b=3$ und $a\cdot b=q$ folgt aus $(a+b)^3=a^3+b^3+3\cdot ab\cdot(a+b)$ für q:
$3^3=81+3\cdot q\cdot 3$, also $q=-6$.

b) In der 1. Zeile stehen die Zahlen $6n+4$, $n=0,1,2,...$, also auch $2008=6\cdot 334+4$. Somit steht 2007 in der 2. Zeile.

c) Ist die Summe von positiven Termen null, so ist jeder Summand null, also $(x,y,z)=(3,4,5)$ und somit $x^2+y^2+z^2=3^2+4^2+5^2=50$.

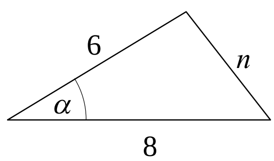


3. a) Für die Seite s des kleinen Achtecks gilt

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{s}{2}+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2=1,\ \text{also ist } s^2=2-\sqrt{2}\,.$$

b) (i) Es muss gelten $8-6<n<8+6$, also gibt es für $n=3,4,...,13$ insgesamt 11 Dreiecke.

(ii) Die Dreiecksfläche $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\sin\alpha$ ist maximal für $\sin\alpha=1$, d.h. für $\alpha=90°$ und somit für $n=10$.



(iii) Für n muss gelten $n^2<8^2-6^2$ oder $n^2>8^2+6^2$, also $n=3,4,5$ oder $n=11,12,13$.

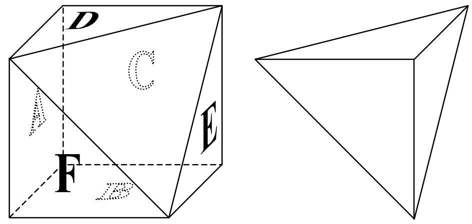
4. Mit $P(x\,|\,x^2)$ hat das Rechteck die Seiten $2x$ und $6-2x^2$, also ist die Fläche f in Abhängigkeit von x: $f(x)=2x\cdot\left(6-2x^2\right),\ 0<x<\sqrt{3}$.

1. Lösung: Es gilt (siehe Hinweis) $f(x)=12x-4x^3=8-(x-1)^2(4x+8)$. Da $4x+8>0$ ist, wird f maximal für $x=1$ mit $f(1)=8$.

2. Lösung: Aus $f'(x)=12-12x^2=0$ folgt $x=1$. Wegen $f''(x)=-24x<0$ für $x=1$ hat f für $x=1$ ein Maximum mit $f(1)=2\cdot(6-2)=8$.

---

5. Der Körper ist ein Einheitswürfel, bei dem eine Ecke abgeschnitten wurde, siehe nebenstehendes Bild.



a) 7 Ecken und 12 Kanten.

b) Die Oberfläche besteht aus drei Einheitsquadraten (A, B, C), drei halben Einheitsquadraten (D, E, F) und einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $\sqrt{2}$.

Also ist die Oberfläche $3\cdot 1^2+3\cdot\frac{1^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{3}\right)$.

c) Vom Volumen des Einheitswürfels muss das Volumen der abgeschnittenen Ecke abgezogen werden: $1^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1^2}{2}\cdot 1=\frac{5}{6}$.

---

6. a) Wegen $y=2x^2-bx+8=2\cdot\left(x-\frac{b}{4}\right)^2+8-\frac{b^2}{8}$ muss $8-\frac{b^2}{8}=0$ sein, also $b=\pm 8$.

b) Aus $f(-3)=81a-9b+2=2$ folgt $f(3)=81a-9b+8=f(-3)+6=2+6=8$.

c) Für ungerade n ist $f(n)=n+3$ gerade, d.h. wenn $f(n)$ ungerade ist, dann muss n gerade sein. Hieraus folgt $f(f(n))=54$. Dann ist entweder $f(n)=51$, also $n=102$, oder $f(n)=108$, also $n=105$ oder $n=216$.

---

7. a) 1. Lösung: Von den Zahlen 100, 101, ... , 999 gibt es $999-100+1=900$.
2. Lösung: $9\cdot 10\cdot 10=900$.

b) Die Zahlen 2, 6 und 8 lassen sich auf $3!=6$ Arten anordnen. Also gibt es 6 solcher Zahlen. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist. Also müssen die gesuchten Zahlen auf 28 oder 68 enden; es gibt daher zwei Zahlen, nämlich 628 und 268.

c) Keinmal die Ziffer 7 enthalten $8\cdot 9\cdot 9=648$ Zahlen. Also enthalten $900-648=252$ Zahlen mindestens einmal die Ziffer 7.

---

8. a) Es gilt $\log_{10}(225!)-\log_{10}(223!)=\log_{10}\left(\frac{225!}{223!}\right)=\log_{10}(225\cdot 224)=\log_{10}(10\cdot 5040)$

$=\log_{10}(10)+\log_{10}(5040)=1+\log_{10}(7!)$, also $n=7$.

b) Sei v die Geschwindigkeit von Manuel, dann läuft Milena mit der Geschwindigkeit $k\cdot v$ ($k>0$). Die Zeit, die Milena für s braucht, ist gleich der Zeit, die Manuel für $s-m$ braucht: $\frac{s}{k\cdot v}=\frac{s-m}{v}$. Also $s=\frac{k\cdot m}{k-1}$.