Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2006 der Jahrgangsstufe 11

1. a) Die Gerade $y = 3x + 1$ schneidet $y = 4$ in $(1\,|\,4)$ und $y = 0$ im Punkt $(0\,|\,1)$, dessen Spiegelpunkt $(0\,|\,7)$ ist.
Also hat die gespiegelte Gerade die Gleichung $\frac{y-7}{x-0} = \frac{7-4}{0-1}$ oder $y = -3x + 7$.

b) Die Gerade $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ schneidet die Koordinatenachsen in $(3\,|\,0)$ und $(0\,|\,2)$, deren Spiegelung am Koordinatenursprung $(-3\,|\,0)$ und $(0\,|\,-2)$ ergibt. Also hat die um 180° gedrehte Gerade die Gleichung $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$ bzw. $2x + 3y + 6 = 0$.

c) Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $x + y = 2$ und $x - y = 12$.
Also ist $2x = 14$ und $2y = -10$, d.h. der Schnittpunkt ist $(7\,|\,-5)$.

---

2. a) Aus $5^x \cdot \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = 24 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ und $1 - \frac{1}{5^2} = \frac{24}{5^2}$ folgt $5^x = 5^{3+\frac{1}{2}}$, also $x = \frac{7}{2}$.

b) <u>1. Lösung</u> (Substitution):
Setzt man $z = 6^x$ so gilt $6z + \frac{6}{z} = 37$ und somit $0 = 6z^2 - 37z + 6 = (6z - 1)\cdot(z - 6)$.
Also ist 6^x entweder 6 oder $\frac{1}{6}$ und somit $x = 1$ oder $x = -1$.

<u>2. Lösung</u> (Exponentenvergleich):
Aus $6^{1+x} + 6^{1-x} = 37 = 36 - 1 = 6^2 - 6^0$ folgt $x = 1$ oder $x = -1$.

c) Setzt man $z = \sqrt[4]{16x + 1}$ so gilt $z^2 = 2z + 3$ und somit $(z - 3)\cdot(z + 1) = 0$.
Wegen $z > 0$ folgt $\sqrt[4]{16x+1} = 3$ und $x = 5$.

---

3. a) Die Seitenlänge des quadratischen Mosaiks ist $2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$ und somit die Fläche $4 \cdot \left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

b) Die Winkel im Dreieck sind $360° - 135° - 2 \cdot 90° = 45°$ und (die Basiswinkel) $\frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = 67{,}5°$.

c) Dreiecksfläche: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 45° = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
Achteckseite s (Kosinussatz): $s^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 45° = 2 - \sqrt{2}$, also $s = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

4. Mit der Dreiecksseite $\frac{x}{3}$, der Dreieckshöhe $\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot x$ und der Quadratseite $\frac{1-x}{4}$ ergibt sich für die Fläche A in Abhängigkeit von x: $A(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}\cdot x^2+\left(\frac{1-x}{4}\right)^2=x^2\left(\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{1}{16}\right)-\frac{x}{8}+\frac{1}{16}$.

1. Lösung (Quadratische Ergänzung, hier aufwändiger):

$$A(x)=\frac{4\sqrt{3}+9}{144}\cdot\left(x^2-\frac{18}{4\sqrt{3}+9}x\right)+\frac{1}{16}=\frac{4\sqrt{3}+9}{144}\cdot\left(x-\frac{9}{4\sqrt{3}+9}\right)^2+\frac{1}{16}-\frac{9}{(4\sqrt{3}+9)\cdot 16}$$

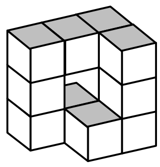
$A(x)$ ist minimal für $x=\frac{9}{4\sqrt{3}+9}\approx 0{,}565$ und zwar $\frac{1}{16}-\frac{9}{(4\sqrt{3}+9)\cdot 16}=\frac{\sqrt{3}}{4\cdot(4\sqrt{3}+9)}$.

2. Lösung (Ableitung):

Aus $A'(x)=\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot x+2\cdot\left(\frac{1-x}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=0$ folgt $x=\frac{9}{4\sqrt{3}+9}$. Wegen $A''(x)>0$ ist $A\left(\frac{9}{4\sqrt{3}+9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4\cdot(4\sqrt{3}+9)}$ ein Minimum.

---

5. a) Jeder der 10 Würfel berührt mit jeweils 2 Seiten seine Nachbarwürfel, also ist die Oberfläche $10\cdot(6-2)=40$. Summe der Kantenlängen: Die Länge der sichtbaren Kanten ist 37 (eine Kante ist nur teilweise zu sehen); die Länge der verdeckten Kanten ist 17; somit beträgt die Summe 54.

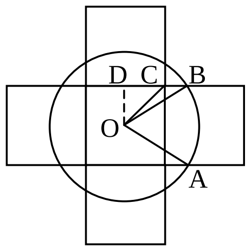


b) Die erreichbare Oberfläche setzt sich aus 4 Kreisausschnitten OAB und 8 Dreiecken OBC zusammen.

Wegen ∢ AOB = 60° ist die Fläche des Kreissektors $\frac{\pi\cdot s^2}{6}$. In ΔOBC ist die Seite $BC=BD-CD=\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{s}{2}$ und die zugehörige Höhe $OD=\frac{s}{2}$.

Also ist die gesuchte Gesamtfläche

$$4\cdot\frac{\pi\cdot s^2}{6}+8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{s}{2}\right)\cdot\frac{s}{2}=s^2\left(\frac{2}{3}\cdot\pi+\sqrt{3}-1\right).$$



---

6. a) Es ist $f(0)=f(-1+1)=(-1)^4-(-1)^3-(-1)+1=4$.

b) Für die Gerade durch $A(2\,|-16)$ und $B(6\,|\,0)$ gilt $\frac{y-0}{x-6}=\frac{0-(-16)}{6-2}$, also $y=4x-24$.

c) Da $f(f(x))=x$ für alle x gelten soll, setzt man z.B. $x=0$.

Aus $0=f(f(0))=f\left(\frac{5}{a}\right)=\frac{5+5a}{5+a^2}$ folgt $a=-1$.

d) Aus $-1=\log_b\frac{1}{2}$ folgt $b^{-1}=\frac{1}{2}$, also $b=2$.

7. Ein Tetraeder hat $E = 4$ Ecken, $K = 6$ Kanten und $F = 4$ Flächen. Ein „gestutzter“ Tetraeder besteht aus 4 Sechsecken und 4 Dreiecken.

a) Ecken: $e = 3 \cdot E = 12$ oder $e = (4 \cdot 6 + 4 \cdot 3) \cdot \frac{1}{3} = 12$;

Kanten: $k = K + 4 \cdot 3 = 18$ oder $k = (4 \cdot 6 + 4 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} = 18$;

Flächen: $f = F + E = 4 + 4 = 8$.

b) Von jeder der e Ecken gehen $e - 4$ Diagonalen aus, d.h. es gibt insgesamt $e \cdot (e-4) \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 48$ Diagonalen.
Von jeder der e Ecken gibt es 6 Flächendiagonalen, die nicht im Inneren verlaufen, also gibt es $48 - 6 \cdot e \cdot \frac{1}{2} = 48 - 36 = 12$ Raumdiagonalen.

---

8. a) Ist a die Seite des Quadrats, so ist die Rechtecksfläche $a \cdot 1{,}1 \cdot a \cdot 0{,}9 = a^2 \cdot 0{,}99$, d.h. die Fläche verkleinert sich um 1%.

b) Der Kreis um E durch F schneidet AB in G und CD in H.
Das Dreieck EGH ist gleichseitig, d.h. $\sphericalangle$ GEH = 60° und $\sphericalangle$ GEF = 30°.

c) Sei a der angeschriebene Preis in Cent und b der zu bezahlende Preis in Euro. Dann gilt $1{,}04 \cdot a = 100 \cdot b$ und somit $a = 2 \cdot 5^4 \cdot \frac{b}{13}$. Da a ganzzahlig und $b < 20$ ist, muss $b = 13$ (Euro) und $a = 1250$ (Cent) sein.
