Mathematikwettbewerb 2005 der Jahrgangsstufe 11

> *__Hinweis__:* Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
> Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.
>
> Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. a) Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,6)$, $B(0\,|\,0)$ und $C(10\,|\,0)$. Welche Koordinaten haben die Punkte D_1, D_2 und D_3, die zusammen mit *A*, *B*, *C* Parallelogramme bilden?
Welches der drei Parallelogramme hat die größte Fläche?

b) Zeichnen Sie in drei verschiedene Koordinatensysteme alle Punkte $(x\,|\,y)$, für die gilt

(i) $y = x - 2$

(ii) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

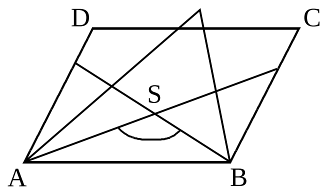
(iii) $(x+2) \cdot y = x^2 - 4$

Welche Punktmengen stimmen überein?

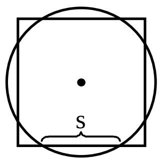
c) Gegeben ist der Punkt $Q(3\,|\,-2)$ und die Gerade $y = 5x + 3$. Wenn ein Punkt *P* die Gerade durchläuft, wie bewegt sich dann der Mittelpunkt *M* der Strecke *PQ* ?

---

2. a) Die Winkel bei A und B im Parallelogramm ABCD werden dreigeteilt. Wie groß ist der Winkel $\measuredangle$ ASB ?



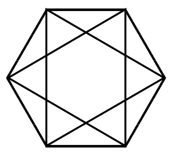
b) Das Quadrat und der Kreis haben denselben Mittelpunkt und dieselbe Fläche.
Wenn der Kreis den Radius 1 hat, wie groß ist dann s ?



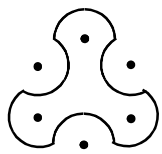
c) Ein Rechteck hat die Fläche 6 und die Diagonale $2\sqrt{5}$.
Wie groß ist sein Umfang?

---

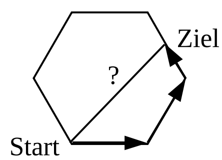
3. a) Verbindet man in einem regelmäßigen Sechseck jede Ecke mit der übernächsten Ecke, so entsteht ein kleines regelmäßiges Sechseck. Wenn das große Sechseck die Seitenlänge s hat, welche Seitenlänge hat dann das kleine Sechseck?



b) Die abgebildete Figur wird durch sechs Halbkreise begrenzt, deren Durchmesser die Seiten eines regelmäßigen Sechsecks sind. Welche Fläche hat die Figur, wenn alle Halbkreise den Radius 1 haben?

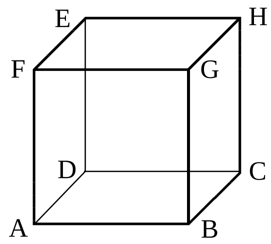


c) Ein Park hat die Form eines regelmäßigen Sechsecks mit einem Umfang von 12 km. Nelly beginnt ihre 5 km lange Wanderung an einer Ecke um den Park herum. Wie viel Kilometer ist sie am Ende ihrer Wanderung vom Startpunkt entfernt?



Dieser Wettbewerb wird veranstaltet von: Zentrum für Mathematik e.V.
in Kooperation mit: Hessisches Kultusministerium; Ciba Spezialitätenchemie Lampertheim GmbH

4. Gegeben ist ein Würfel mit den Ecken A, B, C, D, E, F, G und H.



a) Wie lang ist die Kante AB, wenn die Raumdiagonale AH = 1 ist?

b) Berechnen Sie den Kosinus vom Winkel $\sphericalangle\, CAH$.

c) Seien P und Q die Mitten der Kanten AD und BC.
Wenn der Würfel die Kantenlänge 2 hat,
welche Fläche hat dann das Dreieck PQF ?

d) Wie lang ist der kürzeste Weg von A nach H auf der Oberfläche des Würfels (Kantenlänge 1) ?

---

5. a) Frau Meier, unterwegs auf der Autobahn von Bensheim nach Kassel, bemerkt auf dem Kilometerzähler einen Stand von 15951 km, also ein Palindrom, d.h. eine Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist. Nachdem sie genau zwei Stunden gefahren ist, zeigt ein Blick auf den Kilometerzähler wieder ein Palindrom.
Was war ihre Durchschnittsgeschwindigkeit in diesen zwei Stunden?

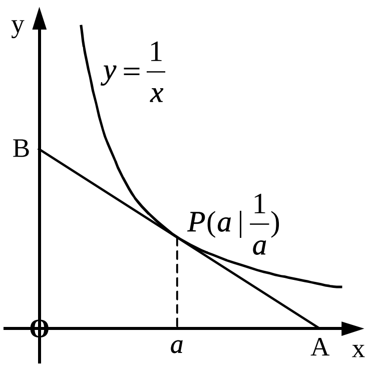
b) In einer Punktfolge folgt auf den Punkt $(x\,|\,y)$ der Punkt $(x+2y\,|\,2x-y)$, z.B. auf $(3\,|\,4)$ folgt $(3+2\cdot 4\,|\,2\cdot 3-4)=(11\,|\,2)$ und danach $(11+2\cdot 2\,|\,2\cdot 11-2)=(15\,|\,20)$ usw.
Wenn der erste Punkt $(a\,|\,b)$ ist, welches ist dann der fünfte Punkt?
Welches ist der 2005. Punkt?

c) Für welche natürliche Zahl n gilt $\dfrac{1+2+3+...+n}{3n} = 36$?

---

6. a) Seien a, b und c ganze Zahlen und $f(x)=(x-a)\cdot(x-10)+1$ und $g(x)=(x+b)\cdot(x+c)$ zwei Funktionen.
Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit für alle reelle Zahlen x gilt $f(x)=g(x)$?

b) Gegeben ist $y=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, und ein Punkt $P(a\,|\,\dfrac{1}{a})$ auf der Kurve.
Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABO, das von der Tangente in P und den Koordinatenachsen gebildet wird.



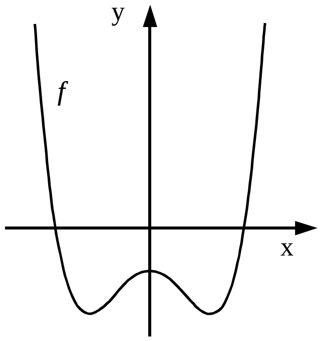
c) Sei $f(x)=x^3-3x^2-2x+5$, x reell. Verschieben Sie f so, dass der Kurvenpunkt $(1\,|\,1)$ in $(0\,|\,0)$ liegt.
Warum ist $g(x):=f(x+1)-1$ punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung?

Dieser Wettbewerb wird veranstaltet von: Zentrum für Mathematik e.V.

in Kooperation mit: Hessisches Kultusministerium

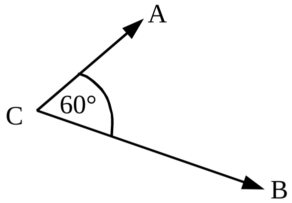
Ciba Spezialitätenchemie Lampertheim GmbH

7. a) Wie sind die Koeffizienten *a*, *b*, *c*, *d* und *e* bei der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ zu wählen, damit *f* den zur y-Achse symmetrischen Graphen hat (siehe Abbildung) ?
Begründen Sie, welche der Koeffizienten positiv, negativ bzw. null sein müssen.



b) Sei *p* eine reelle Zahl. Die Parabel $y = x^2 - px - 1$ schneide die x-Achse in A und B sowie die y-Achse in C.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

c) Zwei Schiffe, A und B verlassen zur gleichen Zeit den Hafen C mit konstanter Geschwindigkeit von 20 km/h bzw. 32 km/h. Ihre Fahrtrichtungen bilden einen 60°-Winkel.
Berechnen Sie die Entfernung zwischen A und B, nachdem die beiden Schiffe 2,5 Stunden gefahren sind.



8. a) Für eine Population gibt es Tabellen zur so genannten Absterbeordnung, d.h. es wird angegeben, wie viele von 10000 lebend Geborenen nach 1, 2, 3, ... Jahren noch leben. Sei *y* die Anzahl der Lebenden nach *x* Jahren. Für $x = 60$ ist $y = 4820$, für $x = 80$ ist $y = 3205$.
Für $60 \le x \le 100$ beschreibt die Funktion $y = ax \cdot (100 - x) + \frac{b}{(x-40)^2}$ die Absterbeordnung ziemlich genau. Bestimmen Sie die Konstanten *a* und *b*.
Wie viele von 10000 Neugeborenen leben noch nach 70 Jahren?

b) Ein Händler kauft einen Artikel 12,5 % unterhalb des Listenpreises, der 24 € beträgt. Er will beim Verkauf einen Gewinn von $33\frac{1}{3}\%$ erzielen. Welchen Betrag P muss er auf das Preisschild an dem Artikel schreiben, wenn er 20 % Rabatt geben will?

c) Thomas hat eine Tüte mit Gummibärchen und zwar 4 rote, 6 grüne und 10 gelbe. Er nimmt ein Bärchen nach dem anderen zufällig aus der Tüte und isst es auf.
Welches ist die kleinste Zahl von Gummibärchen, die Thomas aus der Tüte nehmen muss, um sicher zu sein, von jeder Farbe mindestens zwei gegessen zu haben?