Mathematikwettbewerb 2004 der Jahrgangsstufe 11

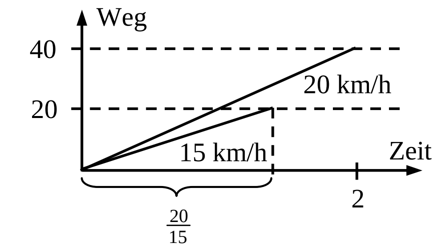
Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Es sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

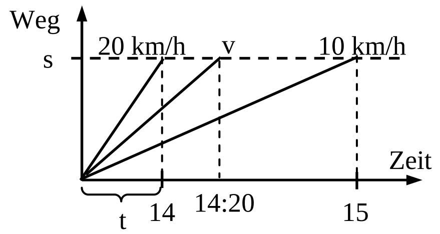
1. a) Gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit *4 P*

$\frac{20}{2-\frac{20}{15}} = 30$, also 30 km/h.



b) Aus $s = 20 \cdot t$ und $s = 10(t+1)$ folgt t = 1 (h) und s = 20 (km). *4 P*

Also $v = \frac{s}{t+\frac{1}{3}} = \frac{20}{\frac{4}{3}} = 15$ (km/h).



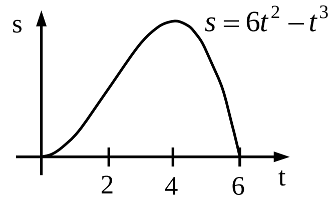
c) Aus $s'(t) = 12t - 3t^2 = 0$ folgt $t = 0$ oder $t = 4$. *4 P*

Aus $s''(t) = 12 - 6t = 0$ folgt $t = 2$.

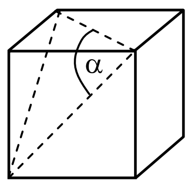
Hieraus erhält man die folgenden Zeitintervalle:

(i) Vorwärts (0 ; 4). Rückwärts (4 ; 6).

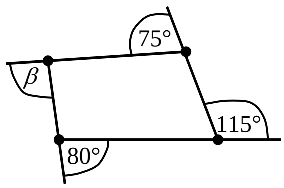
(ii) Gas geben (0 ; 2) und (4 ; 6).
Bremsen (2 ; 4).



2. a) Die drei eingezeichneten Flächendiagonalen bilden ein gleichseitiges Dreieck, also ist α = 60°. *3 P*



b) Aus $(180° - \beta) + 100° + 65° + 105° = 2 \cdot 180°$ folgt $\beta = 90°$. *3 P*



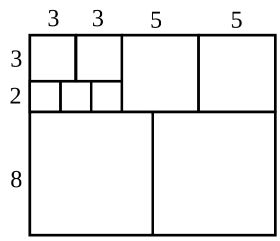
c) Entweder *3 P*

$DE = AB - (AB-5) - (AB-12) = 17 - AB = 17 - \sqrt{12^2 + 5^2} = 4$

oder

$DE = AD + BE - AB = 12 + 5 - 13 = 4$

d) Aus den angegebenen Seitenlängen folgt für den Umfang: $2 \cdot (8+8+5+8) = 58$ und für die Fläche: $16 \cdot 13 = 208$. *3 P*



3. a) Seien a und b die Seiten des Rechtecks. Dann ist die schraffierte Fläche **4P**

$$a\cdot b+\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=a\cdot b$$

b) Wegen $AM=MC$ gilt $\delta=\angle ACM=\angle MAC$ und somit $\cos\delta=\frac{48}{\sqrt{48^2+14^2}}=\frac{48}{50}=0{,}96$. **4 P**

c) Flächenverhältnis: $\frac{\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2}{\pi\cdot 3^2-\pi\cdot 2^2}=\frac{3}{5}$ **4 P**

---

4. a) Sei s die ursprüngliche Kantenlänge. Dann gilt $6\cdot s^2+78=6(s+1)^2$ und somit $s=6\,\text{cm}$. **4 P**

b) (i) $8\cdot 3=24$ Ecken und $12+8\cdot 3=36$ Kanten (oder $24\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=36$) **4 P**

(ii) Nach dem 3. Schritt gibt es $6+8=14$ Flächen, also gibt es nach dem 4. Schritt $14+24=38$ Flächen.

c) Zylindervolumen: $\pi\cdot 1^2\cdot 2=2\pi$ Kugelvolumen: $\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$ **4 P**

Kegelvolumen: $\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 2=\frac{2}{3}\pi$

---

5. a) Aus $y=-x^2+bx-4=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}-4$ folgt für den Scheitel der Parabel $\left(\frac{b}{2},\frac{b^2}{4}-4\right)$, **4 P**

also $b=\pm 4$.

b) Aus $y=x^2+tx+1=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+1-\frac{t^2}{4}$ folgt für die Koordinaten (x,y) des Parabelscheitels **4 P**

$x=-\frac{t}{2}$ und $y=1-\frac{t^2}{4}$, also liegen die Scheitel auf der Kurve $y=1-x^2$.

c) Aus $y=ax^2+bx+c$ folgt $y=a\,(x+3)(x+1)$. Für $x=0$ folgt $c=6$ und $6=a\cdot 3\cdot 1$, d.h. $a=2$ und folglich $b=8$, also $y=2x^2+8x+6$. **4 P**

---

6. a) Aus $\left(\sqrt{1+\cos\alpha}\right)^2=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ folgt $\cos\alpha\,(\cos\alpha+1)=0$, also $\alpha=90°$ oder $\alpha=180°$. **4 P**

b) <u>1. Lsg.</u>: $f(x)=x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2$ ist minimal für $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, also für $x=1$. **4 P**

<u>2. Lsg.</u>: Aus $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0$ folgt $x=1$.

c) Tangente in P: $y=\frac{a}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)$, also $Q\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a},-1\right)$ **4 P**

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Steigung } FP: & \dfrac{\frac{a^2}{4}-1}{a}=\dfrac{a^2-4}{4a}\\[2ex] \text{Steigung } FQ: & \dfrac{-1-1}{\frac{a}{2}-\frac{2}{a}}=-\dfrac{4a}{a^2-4}\end{array}\right\}\quad \text{Also } FP\perp FQ.$$

7. a) Es muss gelten $13 \le n < 17$. Wegen 5^3 folgt $n \ge 15$. Aus 2^{15} folgt $n = 16$. *4 P*

b) Anzahl der Worte, die mit A beginnen: $4! = 24$ *4 P*
Anzahl der Worte, die mit C beginnen: $4! = 24$
Anzahl der Worte, die mit L beginnen: $4! = 24$
Also ist das 73. Wort SACLU, d.h. es beginnt mit S und endet auf U.

c) $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1} = -3$, $a_4 = \frac{-3-1}{-3+1} = 2$, *4 P*
also $2 = a_0 = a_4 = a_8 = \ldots = a_{4\cdot n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Somit gilt $a_{2004} = a_{4\cdot 501} = 2$.

---

8. a) Sei x der Preis für ein T-Shirt. Dann gilt $4(2x+1) = 120$, also $x = 14{,}50$ €. *4 P*

b) Seien c und s die Essenpreise von Caro und Sam. Dann gilt $c = 2s$ und *4 P*
$c\left(1+\frac{15}{100}\right) + s\left(1+\frac{20}{100}\right) = 70$, also $s = 20$ und $c = 40$.

c) Sei l die gesuchte Länge in cm. Dann gilt $\pi \cdot \left(\frac{0{,}6}{2}\right)^2 \cdot l = 75 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3$, *4 P*

also $l = \frac{75}{\pi \cdot 0{,}09} \approx 265$ (cm).

Für Ihre Auswertung (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse der Einzelaufgaben:

Aufgabe	Anzahl der Schüler/innen Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnis:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **12. März 2004** die Schulsiegerin bzw. den Schulsieger zu melden (Vorname, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl);
bei **50 oder mehr Punkten** bitte Bearbeitung im **Original** zuschicken.
Die Schulsiegerin bzw. der Schulsieger erhalten, wenn sie mindestens 30 Punkte erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis.