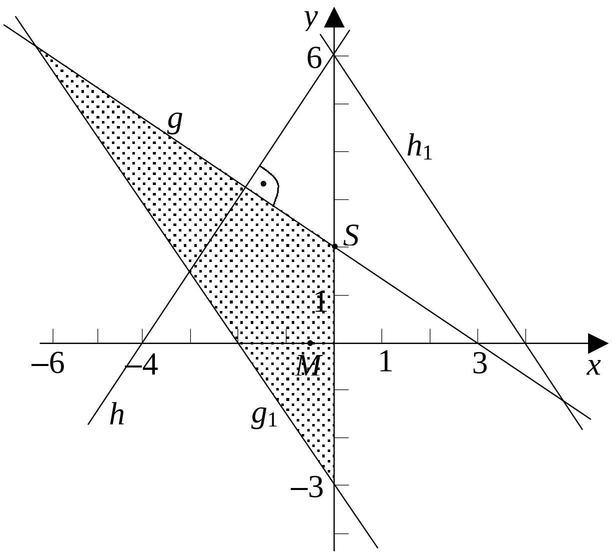
Lösungen zu den Musteraufgaben zum **Mathematikwettbewerb 2001 der Jahrgangsstufe 11**

1.



$g: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$

$h: \frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 6$

a) Für die Steigungen von g und h gilt: $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, also stehen g und h senkrecht aufeinander.
Das Dreieck aus g, h und der x-Achse ist rechtwinklig, also ist der Umkreismittelpunkt die Mitte der Hypotenuse: M (–½ | 0)

b) Dreiecksfläche $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$

c) S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1. Eine Seitenhalbierende liegt auf der y-Achse, also gilt S (0 | 2).

---

2. Seien r, a und $r - a$ die Radien von k, k_1 bzw. k_2.

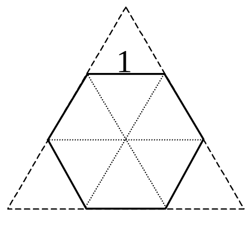
a) Die Fläche $\pi \cdot r^2 - \pi \cdot a^2 - \pi \cdot (r-a)^2 = \frac{\pi}{2}\left(r^2 - (2a-r)^2\right)$ ist maximal für $2a = r$, d.h. P ist der Mittelpunkt von AB.

b) Die Summe der Umfänge $2\pi \cdot a + 2\pi \cdot (r-a) = 2\pi \cdot r$ ist unabhängig von der Lage von P.

---

3. a) Die Fläche des Sechsecks mit der Seitenlänge 1 ist

$$6 \cdot \frac{1^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

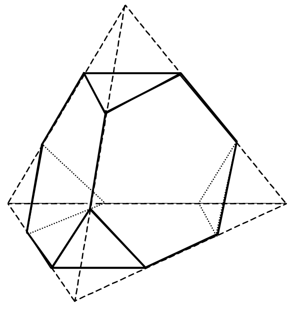


b) 12 Ecken, 18 Kanten, 8 Flächen

$$\text{Volumen} = \frac{3^3}{12}\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1^3}{12}\sqrt{2} = \frac{23}{12}\sqrt{2}$$

Die Oberfläche besteht aus jeweils vier gleichseitigen Dreiecken und Sechsecken mit Seitenlänge 1:

$$\text{Oberfläche} = 4 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$



---

4. Es gilt $x_1 \cdot x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = p$, also $q = -\frac{1}{3}$ und $p = \frac{1}{6}$.

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{1 \pm 7}{12}, \text{ also } x_1 = \frac{2}{3} \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}$$

---

5. a) $1 + x \cdot f(x) = 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} = f(x)$

b) Für $|x| < 1$ gilt: $1 - x \neq 0$ und $x^n \to 0$ für $n \to \infty$. Also $\frac{x^n}{1-x} \to 0$ für $n \to \infty$

c) $S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$; $S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$; $S_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

---

6. a) Aus $(1+r)^{20} = 2$ folgt $r = \sqrt[20]{2} - 1 \approx 0{,}035 = 3{,}5\%$

b) Aus $0{,}8^n = \frac{1}{2}$ folgt $n = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}8} \approx 3{,}1$ Stunden.

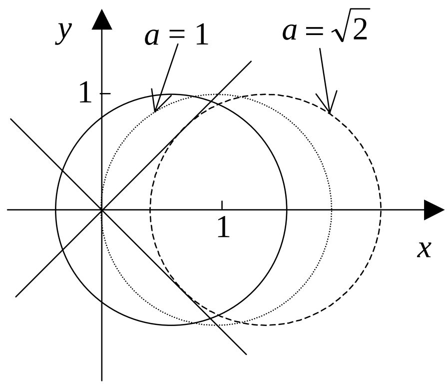
Aus $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$ folgt für die Oberfläche:

$$4\pi \cdot \left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = 4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{ mit } \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0{,}6299 = 63\%$$

---

7. a) Genau drei Lösungen (Schnittpunkte) für $a = 1$

b) Genau zwei Lösungen (Berührpunkte) für $a = \sqrt{2}$



---

8. Für $x = 0$ gilt $0 \cdot f(1) = -4 \cdot f(0)$, also $f(0) = 0$

Für $x = 2$ gilt $2 \cdot f(3) = 0 \cdot f(2)$, also $f(3) = 0$

Für $x = -2$ gilt $-2 \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-2)$, also $f(-1) = 0$
