



Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 14.02.2001

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.

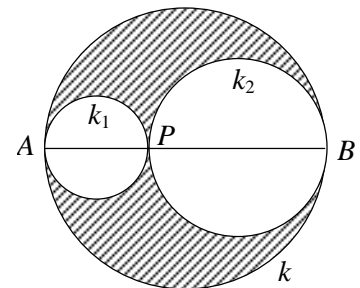
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal bzw. Geodreieck).

1. Gegeben ist eine Gerade g mit $3y + 2x = 6$ und eine Gerade h , die die x -Achse bei -4 und die y -Achse bei 6 schneidet.
- Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und h .
Welche Koordinaten hat der Umkreismittelpunkt M des Dreiecks zwischen g , h und der x -Achse?
 - Die Gerade g_1 sei das Spiegelbild von g bzgl. der 2. Winkelhalbierenden ($y = -x$).
Wie groß ist die Fläche des Dreiecks zwischen g , g_1 und der y -Achse?
 - Die Gerade h_1 sei das Spiegelbild von h bzgl. der y -Achse.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks, das von h , h_1 und der x -Achse begrenzt wird.

Hinweis: S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

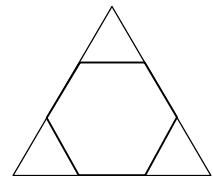
2. Gegeben ist eine Strecke AB , ein Kreis k mit AB als Durchmesser sowie ein Punkt P auf AB . AP und PB seien Durchmesser von zwei Kreisen k_1 bzw. k_2 (s. Abb.).



- Für welche Wahl von P ist die schraffierte Fläche, d.h. die Fläche innerhalb von k und außerhalb von k_1 und k_2 , maximal?
- Für welche Wahl von P ist die Summe der Umfänge von k_1 und k_2 maximal?

3. a) Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3. Die Ecken dieses Dreiecks werden so abgeschnitten, dass ein regelmäßiges Sechseck entsteht.

Wie groß sind die Seiten und die Fläche dieses Sechsecks?



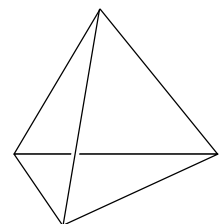
- b) Bei einem regelmäßigen Tetraeder (Kantenlänge 3) werden die vier Ecken so abgeschnitten, dass auf jeder Seitenfläche ein regelmäßiges Sechseck entsteht.

Bestimmen Sie die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des so entstandenen Körpers.

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche dieses Körpers.

Hinweis: Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a hat das

$$\text{Volumen } V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2} \text{ und die Oberfläche } O = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} .$$





4. Für die Nullstellen x_1 und x_2 der Parabel $y = x^2 - px + q$ gilt $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$ und $x_1 + x_2 = \frac{1}{6}$.
Bestimmen Sie p und q sowie x_1 und x_2 .

5. Es sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.

a) Zeigen Sie: $f(x) = 1 + x \cdot f(x)$.

b) Aus a) folgt $f(x) = 1 + x \cdot f(x) = 1 + x \cdot (1 + x \cdot f(x))$
 $= 1 + x + x^2 \cdot f(x) = \dots$
 $= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n \cdot f(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Begründen Sie, warum für $|x| < 1$ immer gilt: $x^n \cdot f(x) = \frac{x^n}{1-x} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

- c) Aus b) folgt für $|x| < 1$ die sogenannte Summenformel der geometrischen Reihe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Berechnen Sie hiermit

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

6. a) Eine Population verdoppelt sich alle 20 Jahre, und zwar jährlich mit einer konstanten Zuwachsrate.
Bestimmen Sie den jährlichen prozentualen Zuwachs.
- b) Ein kugelrunder Schneeball verliert beim Abschmelzen pro Stunde 20% seines Volumens.
Nach wieviel Stunden ist er nur noch halb so schwer?
Um wieviel Prozent ist dann seine Oberfläche geschrumpft?

7. Für welches $a > 0$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

- a) genau drei Lösungen?
b) genau zwei Lösungen?

Hinweis: Interpretiert man die Gleichungen geometrisch, so sind die gesuchten Lösungen Punkte im Koordinatensystem.

8. Zeigen Sie:
Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung
- $$x \cdot f(x+1) = (x^2 - 4) \cdot f(x)$$
- erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.