Mathematikwettbewerb 2001 der Jahrgangsstufe 11

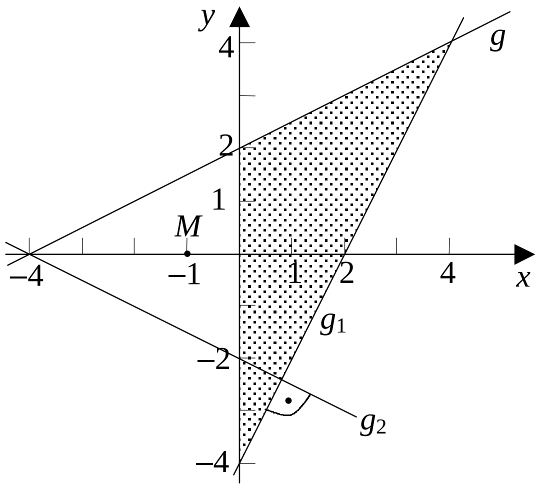
Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Insgesamt sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Die Punkteverteilung innerhalb einer Aufgabe ist jeweils für einen Lösungsweg angegeben. Bei anderen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, die angegebene Punktzahl für Teilaufgaben sollte dabei eingehalten werden.
- Es werden keine halben Punkte vergeben.

1. $g: \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$

$g_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 4}$



4 P a) Dreiecksfläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \boxed{12}$

2 P b) $g_2: \frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x - 2}$

6 P c) Für die Steigungen von g_1 und g_2 gilt:

$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$,

also stehen g_1 und g_2 senkrecht aufeinander.

Das Dreieck aus g_1, g_2 und der x-Achse ist rechtwinklig, also ist der Umkreismittelpunkt der Mittelpunkt der Hypotenuse: $\boxed{M\,(-1 \mid 0)}$

2. a) *6 P*

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot a^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (r-a)^3$$
$$= 4\pi \cdot r \cdot \left(ar - a^2\right)$$
$$= 4\pi \cdot r \cdot \left(\frac{r^2}{4} - \left(a - \frac{r}{2}\right)^2\right)$$

Also ist das Volumen maximal für $\boxed{a = \frac{r}{2}}$, d.h. K_1 und K_2 sind gleich groß.

6 P b) Oberfläche: $4\pi \cdot a^2 + 4\pi \cdot (r-a)^2 = 2\pi \cdot \left((2a-r)^2 + r^2\right)$

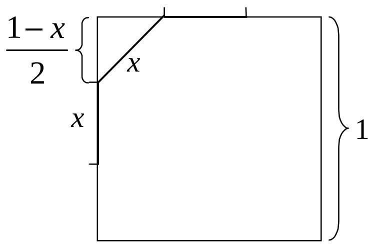
Die Summe der Oberflächen ist minimal für $\boxed{2a = r}$, d.h. K_1 und K_2 sind gleich groß.

3. a) Für die Seitenlänge x des Achtecks gilt:

5 P

$$x^2 = 2\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)^2,\ \text{also}\ x=\sqrt{2}-1$$

Für die Fläche gilt: $1-4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = \boxed{2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}$



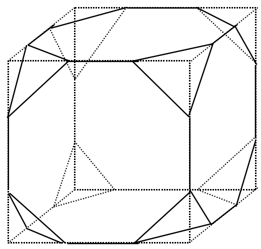
7 P b) 24 Ecken, 36 Kanten, 14 Flächen

$$\text{Volumen} = 1-8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^3 = 1-\frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)^3$$

$$= \boxed{\frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$\text{Oberfläche} = 6\cdot 2x + 8\cdot\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$$

$$= \boxed{12\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)+2\sqrt{3}\left(3-2\sqrt{2}\right)}$$

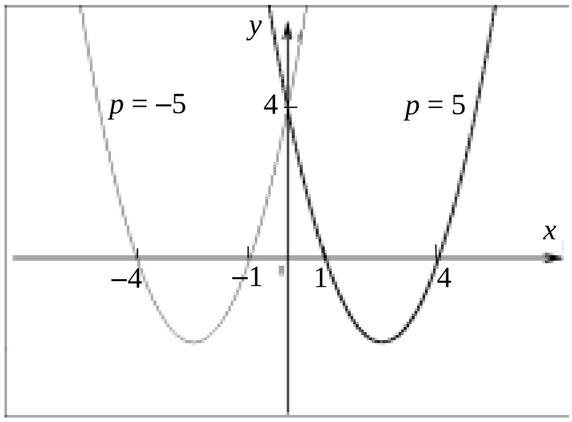


---

4. Aus $4 = 0^2 - p\cdot 0 + q$ folgt $q = 4$.
Die Parabel $y = x^2 - px + 4$ hat die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 4} = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-16}\,.$$

Somit gilt:
$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{p^2-16} = 3$, also $\boxed{p = \pm 5}$.



---

5. a) $a_3 = -\frac{3}{2},\quad a_4 = \frac{3}{4},\quad a_5 = -\frac{3}{8}$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(-2) = -\frac{1}{2}$

c) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = -6\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right) = -4$

---

6. a) Aus $\pi\cdot r^2 h = \pi\cdot r_1^2 h_1$ folgt $\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h_1}{h} = 1{,}25$ und somit $r_1 = \frac{r}{\sqrt{1{,}25}} = 0{,}894\,r$, also ist der Radius um $\boxed{10{,}6\%}$ kleiner.

6 P

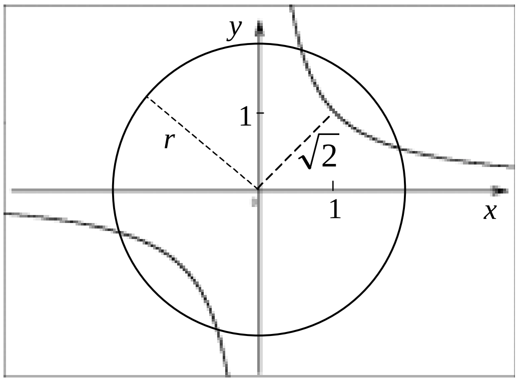
6 P

b) Aus $10^{-k\cdot 3{,}5} = 0{,}6\cdot 10^{-k\cdot 3}$ folgt $\boxed{k = -2\cdot\frac{\lg 0{,}6}{\lg 10} = 0{,}44}$.

7. a) Keine Lösung für $r < \sqrt{2}$
(keine Schnittpunkte)

b) Genau zwei Lösungen für $r = \sqrt{2}$
(zwei Berührpunkte)

c) Vier Lösungen für $r > \sqrt{2}$
(vier Schnittpunkte)



8. Für $n = 0$ gilt $f(0) = 0 \cdot f(1) = 0$

Für $n > 1$ gilt $f(n) = \dfrac{f(n-1)}{n-1} = \dfrac{f(n-2)}{(n-2)\cdot(n-1)} = \ldots = \dfrac{f(1)}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(= \dfrac{1}{(n-1)!}\right)$

Für $n < 0$ gilt $f(n) = n \cdot f(n+1) = n\cdot(n+1)\cdot f(n+2) = \ldots = n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot f(0) = 0$