Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 11 2000 - Lösungen

(Es ist jeweils nur ein Lösungsweg angegeben)

1. Dreieck mit den Ecken $A\,(1|8)$, $B\,(25|1)$, $C\,(13|17)$.

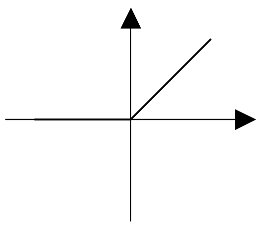
   a) Bestimmen der Seitenlängen: AB = 25; BC = 20; AC = 15
   nach Satz des Pythagoras: rechter Winkel bei C

   b) H = C = (13/17);
   M ist Mitte von AB (Thalessatz) ⇒ M = (13 / 4,5)
   S teilt Strecke CM im Verhältnis 2:1 (s. c)) ⇒ S = (13 / 8 2/3)

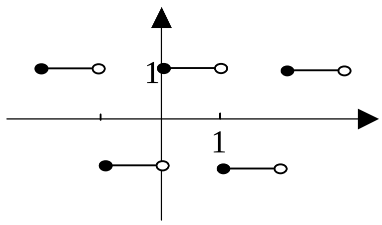
   c) Da H, S und M auf einer Geraden parallel zur y-Achse liegen, genügt ein Vergleich der y-Werte von H, S und M: $y_H - y_M = 17 - 9/2 = 12\ 1/2$; $12\ 1/2 : 3 = 4\ 1/6$;
   $y_M + 4\ 1/6 = 8\ 2/3 = y_S$

---

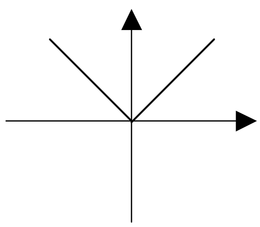
2. a)



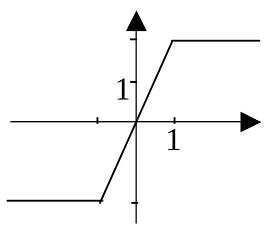
b)



c)

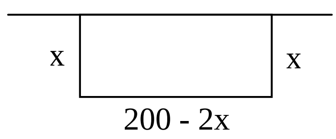


d) nach Fallunterscheidung:

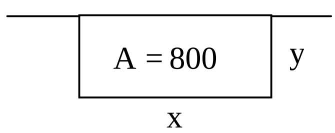


---

3. a) Fläche: A = x (200 – 2x)
   = 2(50² - (x – 50)²)
   maximal für x = 50
   (oder mit Ableitung)



   b) Fläche: A = x · y
   Umfang: $U = x + 2y = x + \dfrac{2A}{x}$



$$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^2 + \sqrt{2A}$$ ist minimal für

$$\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2A}{x}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2A} = 40 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2A}}{2} = 20$$

(oder mit Ableitung)

---

4. $a_1 = 2$; a_{10} 524

a) $a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow d = 58254 \Rightarrow a_2 = 58256$; $a_3 = 116510$

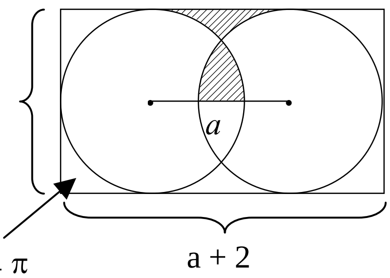
b) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow a_2 = 8$; $a_3 = 32$

c) a): $a_{n+1} = a_n + 58254$ $\quad a_n = 2 + (n-1) \cdot 58254$
b): $a_{n+1} = a_n \cdot 4$ $\quad a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$

5. Wenn die schraffierten Flächen gleich sind, gilt für die Rechtecksfläche:

$A = (a + 2) \cdot 2 = 4(1 - \frac{1}{4}\pi) + 2\pi$

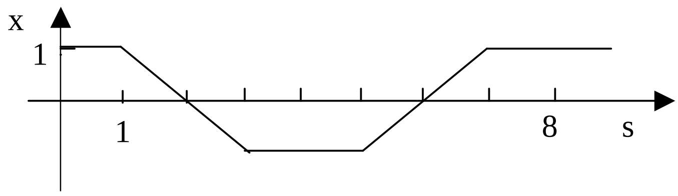
Hieraus folgt: $a = \frac{1}{2}\pi$



6. Lösungen von $2^{-x} = sin(5\pi \cdot x)$ sind die Schnittpunkte der beiden Funktionen
i) Exponentialfunktion mit Basis 2, gespiegelt an y-Achse
ii) Sinusfunktion mit Periode 5/2

Die Zeichnung ergibt 6 Schnittpunkte, d.h. 6 Lösungen für $x < 1$.

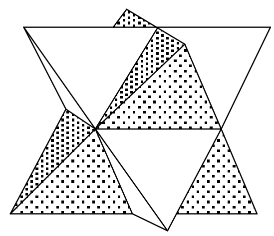
7. a)



Periode: 8

b) Kosinusfunktion

8. a) D ist ein Oktaeder (d.h. ein regelmäßiger Achtflächner), begrenzt durch 8 gleichseitige Dreiecke.
Kantenlänge des Oktaeders ist die halbe Kantenlänge des Tetraeders.



b) Sei T das Tetraedervolumen. Dann hat ein Zacken des Sterns das Volumen 1/8 T. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} D = T - 4 \cdot 1/8\ T \\ V = T + 4 \cdot 1/8\ T \end{array}\right\} \quad V:D = 3$$