



Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 29.03.2000

Hinweis: Entsprechend zu dem Hessischen Mathematikwettbewerb für die achte Jahrgangsstufe werden beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 Aufgaben zur Auswahl angeboten, und zwar werden von acht Aufgaben fünf gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zur Bearbeitung dieser Musteraufgaben wird man i.a. mehr als zwei Stunden Zeit benötigen.

1. Gegeben ist im Koordinatensystem ein Dreieck mit den Ecken $A(1|8)$, $B(25|1)$, $C(13|17)$.

- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist!
- Welche Koordinaten haben der Höhenschnittpunkt H , der Umkreismittelpunkt M und der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden?
- Leonhard Euler hat vor ca. 250 Jahren bewiesen, dass H , M und S auf einer Geraden liegen und S die Strecke HM im Verhältnis 2:1 teilt. Bestätigen Sie diesen Sachverhalt an dem gegebenen Dreieck ABC !

2. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

a) $y = \frac{x + |x|}{2}$

b) $y = (-1)^{[x]}$

Hinweis: Mit $[x]$ wird die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet, z.B. $[7,2] = 7$; $[0,9] = 0$; $[\pi] = 3$; $[-8,1] = -9$; $[-6] = -6$

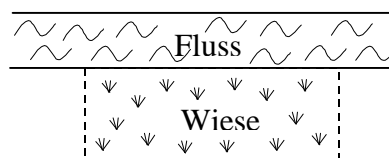
c) $y = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$

Hinweis: Die Vorzeichen- oder Signumfunktion sgn ist definiert durch

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

d) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

3. Am Ufer eines Flusses soll eine rechteckige Wiesenfläche eingezäunt werden, wobei man am geradlinig verlaufenden Ufer keinen Zaun benötigt.



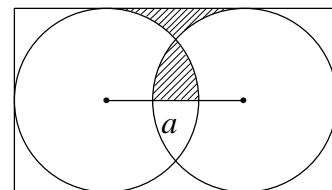
- Zum Einzäunen stehen 200 m Maschendraht zur Verfügung. Wie müssen Länge und Breite der rechteckigen Fläche gewählt werden, damit die Wiesenfläche möglichst groß ist?
- Die Wiese soll eine Fläche von 800 m² haben. Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks gewählt werden, damit möglichst wenig Maschendraht benötigt wird?



4. Eine Zahlenfolge beginnt mit 2 und hat 524 288 als zehntes Folgenglied.
- Es soll sich um eine arithmetische Folge handeln. Wie lauten die ersten drei Glieder?
 - Welches sind die ersten drei Glieder, wenn es sich um eine geometrische Folge handelt?
 - Geben Sie für die Folgen unter a) und b) jeweils die rekursive und die explizite Darstellung an.

Hinweis: Eine Folge heißt arithmetisch (geometrisch), wenn die Differenz (der Quotient) zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.
Beispiel: Die arithmetische Folge (a_n) : 3, 10, 17, 24, 31, ... hat die rekursive Darstellung $a_{n+1} = a_n + 7$, $a_1 = 3$ und die explizite Darstellung $a_n = 7n - 4$, $n = 1, 2, 3, \dots$
 Für die geometrische Folge (b_n) : 3, 6, 12, 24, 48, ... gilt die rekursive Definition $b_{n+1} = 2 b_n$, $b_1 = 3$ bzw. die explizite Darstellung $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

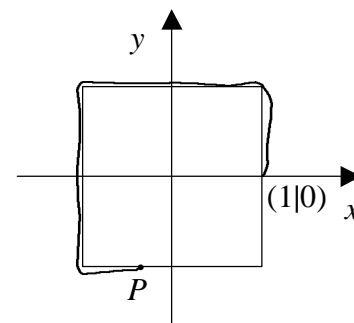
5. Gegeben sind zwei Kreise mit Radius 1 innerhalb eines Rechtecks (s. Abb.).
 Wie groß muss der Abstand a der Kreismittelpunkte gewählt werden, damit die beiden schraffierten Flächen gleich groß sind?



6. Wie viele reelle Zahlen x kleiner als 1 genügen der Gleichung $2^{-x} = \sin(5p \cdot x)$?

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe graphisch!

7. In einem Koordinatensystem sei ein Quadrat mit den Ecken $(1|1)$, $(-1|1)$, $(-1|-1)$ sowie $(1|-1)$ gegeben. Man befestige im Punkt $(1|0)$ einen Faden und wickle ihn gegen den Uhrzeigersinn um das Quadrat herum auf. Hat man die Länge s aufgewickelt, so befindet man sich an einem bestimmten Randpunkt P des Quadrats. Man ordnet nun der Fadenlänge s die x -Koordinate dieses Punktes P zu. Die so definierte Funktion f heiße „Wickelfunktion“.



- Zeichnen Sie den Graphen von f im (s,x) -Koordinatensystem. Welche Periode hat f ?
 - Welche „Wickelfunktion“ erhält man, wenn man das Quadrat durch den Einheitskreis ersetzt?
8. Zwei reguläre Tetraeder mit gleicher Kantenlänge durchdringen einander so, dass jede Fläche durch die Mittelpunkte von drei Kanten geht, die von einer Ecke ausgehen. Die Vereinigung V der beiden Tetraeder ist ein dreidimensionaler „Stern“.
- Sei D der Körper, der aus allen Punkten besteht, die zu beiden Tetraedern gehören. Beschreiben Sie diesen „Durchdringungskörper“!
 - In welchem Verhältnis stehen die Volumina von V und D ?

