

## Mathematikwettbewerb 2000 der Jahrgangsstufe 11

**Hinweis:** Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.

**Zugelassene Hilfsmittel:** Geodreieck, Zirkel, Formelsammlung, **nicht** jedoch der Taschenrechner

1. Gegeben ist im Koordinatensystem ein Dreieck mit den Ecken  $A(4|-3)$ ,  $B(0|5)$  und  $C(-5|-3)$ .
- Welche Gleichung hat die Gerade durch  $A$  und  $B$ ?
  - Welche Koordinaten hat das Bild  $C'$  von  $C$  bei der Spiegelung an der Geraden  $AB$ ?
  - Welche Koordinaten hat der Höhenschnittpunkt  $H$ ?
  - Wie groß ist die Fläche des Dreiecks  $ABC$ ?

2. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

a)  $y = |1 - |x||$

b)  $y = x - [x]$

**Hinweis:** Mit  $[x]$  wird die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$  bezeichnet, z.B.  $[7,2] = 7$ ;  $[0,9] = 0$ ;  $[\pi] = 3$ ;  
 $[-8,1] = -9$ ;  $[-6] = -6$

c)  $y = [\cos x]$

d)  $y = (x-1) \operatorname{sgn} x$

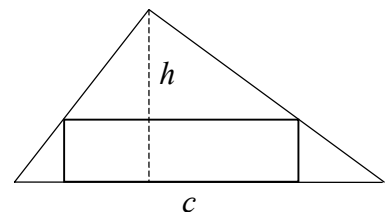
**Hinweis:** Die Vorzeichen- oder Signumfunktion  $\operatorname{sgn}$  ist definiert durch

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

3. Gegeben ist ein Dreieck mit der Seite  $c$  und der zugehörigen Höhe  $h$ .

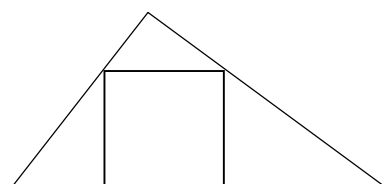
- a) Diesem Dreieck sei ein Rechteck so eingeschrieben, dass eine seiner Seiten auf  $c$  liegt und die zwei anderen Ecken auf je einer Seite des Dreiecks liegen (s. Abb.).

Wann hat ein solches Rechteck den größten Flächeninhalt? Wie groß ist diese Fläche?



- b) Unter allen dem Dreieck eingeschriebenen Rechtecken (vgl. a)) gibt es eines mit gleich langen Seiten, d.h. ein Quadrat.

Konstruieren Sie dieses Quadrat!



4. Drei paarweise verschiedene Zahlen  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit der Summe 9 bilden in der Reihenfolge  $x$ ,  $y$ ,  $z$  eine arithmetische Folge und in der Reihenfolge  $y$ ,  $z$ ,  $x$  eine geometrische Folge.

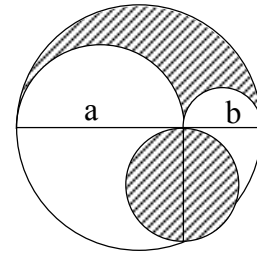
Berechnen Sie  $x$ ,  $y$  und  $z$ !

**Hinweis:** Eine Folge heißt arithmetisch (geometrisch), wenn die Differenz (der Quotient) zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.



5. Gegeben sind zwei Halbkreise mit den Durchmessern  $a$  und  $b$ , sowie ein Kreis mit dem Durchmesser  $a + b$ . Die Kreisbögen begrenzen ein sichelförmiges Gebiet (s. Abb.).

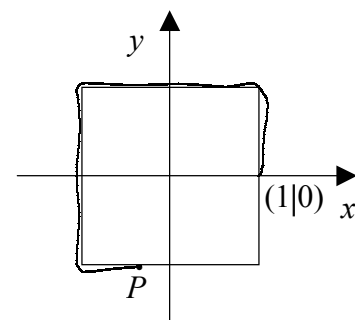
Zeigen Sie, dass die Fläche dieses Gebietes gleich der schraffierten Kreisfläche ist!



6. Wie viele reelle Zahlen  $x$  genügen der Gleichung  $x^3 = \cos(3\pi \cdot x)$ ?

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe graphisch!

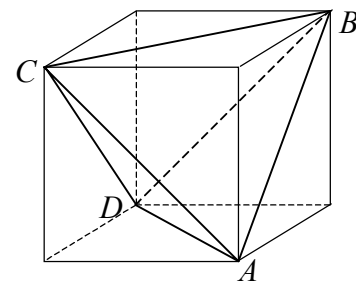
7. In einem Koordinatensystem sei ein Quadrat mit den Ecken  $(1|1)$ ,  $(-1|1)$ ,  $(-1|-1)$  sowie  $(1|-1)$  gegeben. Man befestige im Punkt  $(1|0)$  einen Faden und wickle ihn gegen den Uhrzeigersinn um das Quadrat herum auf. Hat man die Länge  $s$  aufgewickelt, so befindet man sich an einem bestimmten Randpunkt  $P$  des Quadrats. Man ordnet nun der Fadenlänge  $s$  die  $y$ -Koordinate von Punkt  $P$  zu. Die so definierte Funktion  $f$  heiße „Wickelfunktion“.



- a) Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  im  $(s,y)$ -Koordinatensystem! Welche Periode hat  $f$ ?
- b) Welche „Wickelfunktion“ erhält man, wenn man das Quadrat durch den Einheitskreis ersetzt?

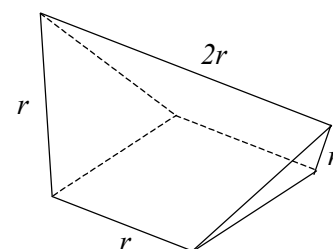
8. a) In einem Würfel mit Kantenlänge  $a$  bilden die eingezeichneten Flächendiagonalen das Tetraeder  $ABCD$  (s. Abb.).

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Tetraeders in Abhängigkeit von  $a$ !



- b) Der abgebildete Körper hat eine quadratische Grundfläche mit der Seite  $r$ . Die obere Kante ist parallel zur Basis und hat die Länge  $2r$ , alle übrigen Kanten haben die Länge  $r$ .

Welches ist das Volumen des Körpers, wenn  $r = 6\sqrt{2}$  ist?



Hinweis: Wenn man zwei Exemplare des abgebildeten Körpers mit den Quadratflächen so zusammenlegt, dass Trapezflächen mit Dreiecksflächen aneinander stoßen, dann entsteht ein einfach zu berechnender Körper.

